Mat-1.150 Reaalianalyysi: 8. harj. vastauksineen ma 15.3.1999 (4 sivua)

1. Välikoealue Ensimmäiseen välikokeeseen tulevat kirjan luvut 1–4 poislukien kohtien 1.36, 2.12, 2.13, 2.14, 2.24, 4.21 ja 4.22 todistukset sekä poislukien kokonaan kohdat 2.22, 2.23 ja 2.25.

Välikokeet ovat 1. vk. ma 29.3. klo 12–15, (tuolloin laskuharjoitus pidetään klo 15.15–17 huoneessa U325 tms.), 2. vk. ke 12.5. 13–16. Nämä ovat samat kuin aiemmin on ilmoitettu, paitsi että 6. laskuharjoituksissa oli väärät (vuoden 1997) tiedot!

Mikäli sinulla on este 1. välikokeeseen, ota heti yhteyttä: Kalle.Mikkola@hut.fi; mikäli sinulla on este 2. välikokeeseen, ota yhtettä; kummastakin saatetaan järjestää vaihtoehtoinen tilaisuus (ke 24.3. klo 13 ja ??.5.). Toisen välikokeen alueen suuntaviivat ovat katekismuksessa, mutta muutoksia tullee; lopullinen alue ilmoitetaan myöhemmin ja sisältynee lukuihin 5–8 (tai 5–9).

Tehtävä 8.1 ([5.4] *helpohko,lyhyehkö*):
Olkoon c vakio ja $E_c := \{f \in \mathcal{C}([-1,1]) \,|\, f(0) = c\}$. Olkoon $g(t) \equiv 1/2$. (a) Korjaa tämä tehtävä järkeväksi. (b) Koita löytää jatkuva lineaarinen funktionaali $\Lambda : L^2([-1,1]) \to \mathbb{C}$ s.e. $\Lambda g = 1$ ja $\Lambda f = 0\ \forall f \in E_c$. (c) Koita löytää lineaarinen funktionaali $\Lambda : L^2([-1,1]) \to \mathbb{C}$ s.e. $\Lambda g = 1$ ja $\Lambda f = 0\ \forall f \in E_c$. (Ei kuulu kurssiin.)

Vastaus: (a) $2cg \in E_c$, joten $2c\Lambda g = \Lambda 2cg = 0$, eli $\Lambda g = 0$, ellei $c = 0$. Siis on oltava $c = 0$, jotta edes kannattaisi yrittää löytää ratkaisuja. (huom.: E_c on L^2:n ja $\mathcal{C}$:n aliavaruus joss[1] $c = 0$).

(b) $E_0 \ni F_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |t| > 1/n; \\ n|t| & \text{kun } |t| \le 1/n; \end{cases}$, $g_n := F_n g \in E_0$, jolloin $g_n \in E_0$ ja

$$\|g - g_n\|_{L^2}^2 = \int_{|t|>1/n} 0\,dt + \int_{-1/n}^{1/n} |1/2 - n|t|/2|^2\,dt = 2\int_0^{1/n} (1-nt)^2/4\,dt$$

$$= \int_0^{1/n} -(1-nt)^3/6n\,dt = 1/6n \to 0.$$

[1] Tod.: 1° $c \in E_c$, $0 \cdot c \notin E_c$ (ellei $c = 0$), 2° $f(0) = 0 = g(0) \implies (\alpha f + \beta g)(0) = 0$.

Niinpä $\Lambda g = \Lambda \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_n \Lambda g_n = \lim_n 0 = 0$, jos kerran Λ on jatkuva (eli $\Lambda \in \mathcal{L}(L^2, \mathbb{C}) =: (L^2)^*$).[2]

Tapa 3: On siis välttämättä $\Lambda h = 2h(0)$, kun $h \in \mathcal{C}$.[3] $\|(1 - F_n)\|_2^2 = 4/6n \to 0$, mutta $\Lambda(1 - F_n) = 2$, joten $\|\Lambda\| \ge \|\Lambda(1 - F_n)\|/\|(1 - F_n)\| = 3n \to \infty$, eli Λ ei ole rajoitettu siis se ei voi olla jatkuva [R2:5.4].

(c) (Voit jättää tämän lukematta, sisältää vektoriavaruusasiaa.) Siis välttämättä $\Lambda h = 2h(0)$, kun $h \in \mathcal{C}$ (ks. “tapa 3”). Olkoon V $\mathcal{C}$:n vektorikanta (Hamel-kanta)[4] ja täydennetään se L^2:n vektorikannaksi V'. Vektorille $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k + \sum_{k=1}^m \beta_k v_k' \in L^2$ määritellään $\Lambda f := 2\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k(0)$ (ts. f kirjoitetaan (em. säännön mukaisesti) muodossa $f = F_f + G_f$, missä $F_f \in \mathcal{C}$, ja sitten $\Lambda f := \Lambda F_f = 2F_f(0)$). Tällöin Λ on lineaarinen, $\Lambda g = 1$ ja $\Lambda f = 0\ \forall f \in \mathcal{C}$ (koska $f \in \mathcal{C} \iff f = F_f$), QED.[5]

[2] Tapa 2: E_0 on tiheä L^2:ssa (tod.: jos $f \in L^2$, ota $g \in \mathcal{C}_c = \mathcal{C}$ s.e., $\|f - g\| < \epsilon/2$ ja ota sitten $F_n g \in E_0$ tarpeeksi suurella n), joten $\Lambda = 0$ $\overline{E_0}$:ssa, jos kerran E_0:ssa, koska jatkuva.

[3] Jos $h \in \mathcal{C}$, niin $g_h :\equiv h(0) \in \mathcal{C}$ ja $f_h := h - h(0) \in E_0$. Niinpä $\Lambda h = \Lambda(f_h + g_h) = \Lambda f_h + \Lambda g_h = 0 + \Lambda(2h(0)) \cdot g = (2h(0))\Lambda g = 2h(0)$.

[4] Ts. $V \subset \mathcal{C}$ s.e. jokainen $h \in \mathcal{C}$ on esitettävissä yksikäsitteisesti muodossa $h = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$, missä $n \in \mathbb{N}_+$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $v_k \in V\ \forall k$ (ekvivalentti määritelmä: maksimaalinen lineaarisesti riippumaton joukko). Jokaisen vektoriavaruuden jokainen lineaarisesti riippumaton joukko on täydennettävissä maksimaaliseksi (eli vektorikannaksi). Huom.: Hilbert-avaruuden ortonormaali kanta on usein vähemmän mahtava, ja siinä saa olla äärettömiäkin summia. Useimmissa Banach-avaruuksissa Schauder-kannalla on samantapaisia ominaisuuksia.

[5] Huom.: Jos X ja Y ovat vektoriavaruuksia, V ja W niiden kannat, ja $T : X \to Y$ lineaarinen (merkitään $T \in \mathrm{Hom}(X,Y)$), niin $T\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k T v_k$, ja toisaalta valitsemalla vektorit $y_v \in Y$ jokaiselle $v \in V$ saadaan määriteltyä jokin lineaarikuvaus kaavalla $T\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k := \sum_{k=1}^n \alpha_k y_{v_k}$; siis kaikki lineaarikuvaukset $X \to Y$ ovat täsmälleen em. kuvaukset.

Kuvausta voidaan siis ajatella (äärettömänä, jos W tai V on ääretön) matriisina $T_{v,w} : (v,w) \mapsto T_{v,w}$ ($v \in V$, $w \in W$), missä $T_{v,w}$ saadaan kaavasta $Tv = \sum_{w\in W} T_{v,w} w$ (tietysti kiinteällä $v \in V$ on $T_{v,w} = 0$ kaikilla paitsi äärellsen monella $w \in W$; eihän ääretöntä summaa eli osasummien raja-arvoa voi edes määritellä ilman topologiaa (tai muuta suppenemiskäsitettä)).

Jos X ja Y ovat topologisia (esim. Banach-avaruuksia), niin T ei välttämättä ole jatkuva. Hilbert-avaruudeksissa em. matriisiesitys tehdään usein ortonormaalin kannan avulla, mutta siitäkään ei aina näe, onko kuvaus jatkuva. Äärellisulotteisen Hilbert-avaruuden ortonormaali kanta on myös vektorikanta (siis lineaarisestikin maksimaali-

---

Tehtävä 8.2 ([5.4]([5.16] *keskipitkä*):
[R2:Exe5.6] Olkoon $f \in M^* := \mathcal{L}(M, \mathbb{C})$, missä M on Hilbert-avaruuden H aliavaruus. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen normin säilyttävä f:n laajennos $\Lambda \in H^*$. Osoita myös, että $\Lambda y = 0\ \forall y \in M^\perp$.

Vastaus: Tapa 1: 1° On olemassa $y_f \in \bar{M}$ s.e. $f(x) = \langle x, y \rangle\ \forall x \in M$. *Tapa 1a*: Kuten lauseen [4.12] todistus. *Tapa 1b*: Koska $\bar{M}$ on Hilbert-avaruus ja $\bar{f} \in \bar{M}^*$, missä $\bar{f}$ on f:n yksikäsitteinen jatkuva laajennos $\bar{M}$:lle ($\bar{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, kun $M \ni x_n \to x$ jne.; tämä onnistuu missä tahansa Banach-avaruudessa (yms.)[6]).

2° $\Lambda x := \langle x, y \rangle\ \forall x \in H$ on normiltaan[7] $\|\Lambda\|_{H^*} = \|y\|_H = \|f\|_{M^*}$. Selvästi $\Lambda z = \langle z, y \rangle = 0\ \forall y \in M^\perp$.

---

nen).

[6]Olkoon X ja Z Banach-avaruuksia ja M X:n aliavaruus. Olkoon $T \in \mathcal{L}(M, Z)$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $L \in (\bar{M}, Z)$ s.e. $L_{|_M} = T$ (eli $T \subset L$ eli $Lx = Tx\ \forall x \in M$ eli yksikäsitteinen jatkuva laajennos). Tod.: Olkoon $T \neq 0$ (muutoin valitaan $L = 0$). Olkoon $x \in \bar{M}$ (huom.: selvästi $\bar{M}$ on (vektori)aliavaruus, peräti Banach-avaruus). Olkoon $M \ni x_n \to x$. Määritellään $Lx := \lim_n Tx_n$.

1^circ $\lim_n Tx_n$ on olemassa eli $\{Tx_n\}$ on Cauchy-jono, koska arvolle $\epsilon > 0$ voidaan merkitä $\epsilon' := \epsilon/\|T\|$ ja, koska $\{x_n\}$ on Cauchy-jono, $\exists N_{\epsilon'}$ s.e. $\|x_n - x_m\| < \epsilon'\ \forall n, m \geq N_{\epsilon'}$, jolloin $\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m\| < \epsilon'\|T\| = \epsilon\ \forall n, m \geq N_{\epsilon'}$, QED.

2^circ $Lx := \lim_n Tx_n$ on hyvin (eli yksikäsitteisesti) määritelty eli riippuu vain x:stä: jos $x'_n \to x$, niin $n \geq N_{\epsilon'}, N'_{\epsilon'} \implies \|Tx'_n - Tx_n\| \leq \|T\|\|x'_n - x_n\| \leq \|T\|\|x'_n - x\| + \|x - x_n\| < 2\|T\|\epsilon' = \epsilon$, joten $\|\lim_n Tx'_n - \lim_n Tx_n\| = \lim_n \|Tx'_n - Tx_n\| = 0$, QED.

3^circ L on lineaarinen: Jos $M \ni x_n \to x,\ M \ni y_n \to y$, niin $M \ni \alpha x_n + y_n \to \alpha x + y \in \bar{M}$, joten $L(\alpha x + y) := \lim_n T(\alpha x_n + y_n) = \alpha \lim_n Tx_n + \lim_n Ty_n =: \alpha Lx + Ly$.

4^circ L on jatkuva: $\|Lx\| := \|\lim_n Tx_n\| = \lim_n \|Tx_n\| = \limsup_n \|Tx_n\| \leq \limsup_n \|T\|\|x_n\| = \|T\| \limsup_n \|x_n\| = \|T\|\|x\|$, joten $\|L\| = \|T\|$.

5° L on yksikäsitteinen, koska $L' \in \mathcal{L}(\bar{M}, Z) \wedge L'_{|_M} = T \implies L'x = \lim_n L'x_n = Lx$ jatkuvuuden perusteella, QED.

Huom.: itse asiassa X saisi olla mikä tahansa normiavaruus (mutta Y:n on oltava täydellinen), ja sama todistus kelpaisi. Muissa TVS:issä vähän pidempi todistus (en muista, päteekö ei-metristyvissä; niissä taitaa vaatia filttereitä, metristyvissä (ja kaikissa lokaalisti konvekseissa?) helpohko todistaa).

[7]Toisaalta $\|\Lambda x\| \leq \|x\|\|y\|$ [Cauchy], toisaalta $\|\Lambda y\| = \|y\|\|y\|$, joten $\|\Lambda\| := \sup_{x\neq 0} \|\Lambda x\|/\|x\| = \|y\|$ (sekä kun $x \in M$ (jos $y \in \bar{M} \setminus \{y\}$, valitse $M \ni y_n \to y$) että kun $x \in H$).

3° **Yksikäsitteisyys:** Olkoot P ja Q ortoprojektiot $P : H \to \bar{M}$ ja $Q : H \to \bar{M}$ [4.11] (siis $x = Px + Qx$ jne.). Olkoon $g \in H^*$ ja $g_{|_M} = f$, $h := g - \Lambda \in H^*$, jolloin $h_{|_M} = 0$. $h = \langle \cdot, z \rangle$ jollain $z \in H$ [4.12]. Toisaalta $\langle x, z \rangle = \langle x, Pz \rangle + \langle x, Qz \rangle$ on $0\ \forall x \in M$, siis $\forall x \in \bar{M}$, joten $Pz = 0$ eli $z = Qz \in M^\perp$. Niinpä $g(x) = \Lambda(x) + h(x) = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle = \langle x, y + z \rangle$ ja $\|g\|^2 = \|y + z\|^2 = \|P(y + z)\| + \|Q(y + z)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, joten ainoa normin säilyttävä f on se, jolla $z = 0$ eli $g = \Lambda$.

Tapa 2: $\exists! \bar{f} \in M^*$ s.e. $\bar{f}x = fx\ \forall x \in M$ (tod. kuten 1° yllä). Olkoot P ja Q ortoprojektiot $P : H \to \bar{M}$ ja $Q : H \to \bar{M}^\perp$ [4.11] (siis $x = Px + Qx$ jne.). Määritellään $\Lambda x := \bar{f}Px$, jolloin $\|\Lambda x\| \leq \|\bar{f}\|\|Px\| \leq \|\bar{f}\|\|x\|\ \forall x \in H$, joten $\|\Lambda\| \leq \|\bar{f}\|$, siksi $\|\Lambda\| = \|\bar{f}\|$. Selvästi $\Lambda z = \bar{f}Pz = 0$, kun $z \in M^\perp$ eli $z = Qx$.

Yksikäsitteisyys: kuten 3° yllä.

Tehtävä 8.3 ([5.4]([5.21]) *helppo,nopea*):
[R2:Exe5.8a] Olkoon X normiavaruus ja $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ sen duaali tavanomaisella normillaan

$$\|f\| := \sup\{|fx| \mid \|x\|_X \leq 1\} \qquad f \in X^*.$$

Osoita, että X^* on Banach-avaruus.

Vastaus: 1° X^* on normiavaruus [5.1]:
(c) $\|f\| = 0 \implies |fx| = 0\ \forall x \implies f = 0$ (nollakuvaus $0x = 0\ \forall x \in X$).
(b)$\sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} |(\alpha f)(x)| = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} |\alpha||fx| = |\alpha| \sup_{x\in X} |fx| = |\alpha|\|f\|$. (Tässä $\alpha f \in X^*$ on kuvaus $x \mapsto \alpha(fx) \in \mathbb{C}$.)
(a) $|(f + g)(x)| := |fx + gx| \leq |fx| + |gx| \leq (\|f\| + \|g\|)\|x\|$, joten $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

2° X^* on täydellinen:[8] Olkoon $\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon$ s.e. $\|f_n - f_m\| < \epsilon\ \forall n, m \geq N_\epsilon$ (Cauchy-jono). Jos $x \in X$, niin $\|f_n x - f_m x\| < \epsilon\ \forall n, m \geq N_{\epsilon/\|x\|}$, joten $\{f_n x\}$ on myös Cauchy-jono, merkitään $f(x) := \lim_n f_n x$ (olemassa, koska

---

[8]Tämä on normaali tapa: 0. otetaan Cauchy-jono $\{f_n\}$, 1. arvataan raja-arvo f, 2. todistetaan $f \in X^*$, 3. todistetaan $f_n \to f$. Näin yleensäkin todistetaan jokin avaruus täydelliseksi.

$\mathbb{C}$ on täydellinen). f on selvästi lineaarinen (koska $f(\alpha x) := \lim_n f_n \alpha x = \alpha \lim_n f_n x = \alpha f(x)$ jne.).

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan jokin $n \geq N_\epsilon$. Nyt[9] $|fx| = |f_n x + fx - f_n x| \leq |f_n x| + |fx - f_n x| = |f_n x| + |\lim_{m\to\infty} f_m x - f_n x| = |f_n x| + \lim_{m\to\infty} |(f_m - f_n)x| \leq \|f_n\|\|x\| + \epsilon\|x\|\ \forall x$, joten $\|f\| \leq \|f_{N_\epsilon}\| + \epsilon < \infty$, siis f on rajoitettu eli $f \in X^*$. Toisaalta yllä todistettiin, että $|(f - f_n)x| \leq \epsilon\|x\|\ \forall x$, joten $\|f - f_n\| \leq \epsilon$ (kun $n \geq N_\epsilon$). Siis $f_n \to f$ (normin $\|\cdot\|_{X^*}$ suhteen), QED.

Kommentti: Sama todistus (muutoksella $|\cdot| \mapsto \|\cdot\|$) osoittaa, että $\mathcal{L}(X, Y)$ on Banach-avaruus, kun X on normiavaruus ja Y on mikä tahansa Banach-avaruus (jos Y on vain normiavaruus, niin on myös $\mathcal{L}(X, Y)$ (ellei $\dim X < \infty$)).

Tehtävä 8.4 ([6.1] *helppo,nopea*):
[R2:Exe6.1] Olkoon $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ kompleksinen mitta-avaruus ja

$$\lambda(E) := \sup \sum_i |\mu(E_i)|,$$

missä supremum otetaan kaikkien *äärellisten* E:n (mitallisten) ositusten yli.
Onko välttämättä $\lambda = |\mu|$?[10]

Vastaus: Jos supremum otetaan kaikkien numeroituvien (mitallisten) ositusten yli, saadaan $|\mu|$, niinpä $|\mu| \geq \lambda \geq 0$. Olkoon sitten $E \in \mathfrak{M}$. Osoitetaan $M < |\mu|(E) \Rightarrow M < \lambda(E)$, mistä seuraa, että $\lambda(E) = |\mu|(E)$. Valitaan E:n (mitallinen) ositus $\{E_i\}$ s.e. $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| > M$ [6.1]. Valitaan n s.e. $\sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| > M$. Nyt osituksen $\{E_1, E_2, ..., E_n, E \setminus (E_1 \cup ... \cup E_n)\}$ (n+1 osaa) mukaan $\lambda(E) > \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| + |\mu(E_1 \cup ... \cup E_n)| > M + 0$, QED.

Tehtävä 8.5 ([6.4/6.10] *helpohko, lyhyehkö*):
Olkoon μ positiivinen mitta $(X, \mathfrak{M})$:ssä ja $f \in L^1(X, \mu; [-\infty, \infty])$. Määritellään $\nu(E) := \int_E f\, d\mu$. Osoita, että $|\nu|(E) = \int_E |f|\, d\mu$.[11]

Vastaus: $\lambda_f(E) := \int_E |f|\, d\mu$ määrää positiivisen mitan $\lambda : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ [R2:1.29].
Vastaavasti ν on välttämättä kompleksinen[12] (nyt peräti reaalinen) mitta, mikä nähdään vaikka toteamalla se positiivisten rajoitettujen mittojen $\nu^+(E) := \int_E f^+\, d\mu$ ja $\nu^-(E) := \int_E f^-\, d\mu$ (jotka ovat mittoja [R2:1.29]:n perusteella (ja kompleksisia, koska $\nu^+(X), \nu^-(X) < \infty$)) erotukseksi ($\nu = \int_E f\, d\mu = \int_E (f^+ - f^-)\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-)\, d\mu = \nu^+(E) - \nu^-(E)$.[13]
1^o $|\nu|(E) \leq \lambda_f(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}$. Tod.: Nyt $\lambda_f(X) := \int_X |f|\, d\mu =: \|f\|_1 < \infty$.

$$\sum_j |\nu(E_j)| = \sum_j |\int_{E_j} f\, d\mu| \leq \sum_j \int_{E_j} |f|\, d\mu$$

$$= \sum_j \int_X \chi_{E_j} |f|\, d\mu \overset{R2:1.27}{=} \int_X \sum_j \chi_{E_j} |f|\, d\mu = \int_X \chi_E |f|\, d\mu = \lambda_f(E),$$

kun $\{E_j\}$ on jokin E:n ositus. Niinpä $|\nu|(E) \leq \lambda_f(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}$.

2^o $|\nu|(E) \geq \lambda_f(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}$. Tod.: $E^+ := \{x \in E \mid f(x) > 0\} = E \cap f^{-1}[\mathbb{R}_+] \in \mathfrak{M}$.

$$|\nu|(E) \geq |\nu(E^+)| + |\nu(E \setminus E^+)| := |\int_{E^+} f\, d\mu| + |\int_{E\setminus E^+} f\, d\mu| := \int_{E^+} f\, d\mu - \int_{E\setminus E^+} f\, d$$

$$:= \int_{E^+} f\, d\mu + \int_{E\setminus E^+} (-f)\, d\mu := \int_{E^+} |f|\, d\mu + \int_{E\setminus E^+} |f|\, d\mu := \int_E |f|\, d\mu =: \lambda_f(E).$$

On tapana sanoa, että f on ν_f:n (ja $|f|$ on $|\nu_f|$:n) *Radonin–Nikodymin derivaatta* [R2:6.10].

Kommentteja: Väite pätee myös kompleksisille $f \in L^1(\mu)$: 1^o pätee sellaisenaan, 2^o voitaisiin hoitaa seuraavasti: Jos $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$, missä

---

[9] Koska $\lim_n$:n saa ottaa ulos jatkuvasta funktiosta, jollaisia ovat mm. $\|\cdot\|$, $+$ ja $-$.

[10] Vihje: Selvästi $\lambda \leq |\mu|$. Todistaaksesi käänteisen oleta, että $|\mu|(E) > M$, ja todista, että $\lambda(E) > M$.

[11] Vihje: $E^+ := \{x \mid f(x) > 0\}$, $E^- := \{x \mid f(x) \leq 0\}$, jolloin $|\nu|(E) \geq ... = \int_E |f|\, d\mu$. Toisaalta $|\nu|(E) \leq ... = \int_E |f|\, d\mu$.

[12] Huom.: jokainen kompleksinen mitta on rajoitettu [R2:6.4]; positiiviset mitathan voivat olla äärettömiäkin.

[13] Vastaavasti yleisen $f \in L^1(\mu)$ integraali nähdään mitaksi yo. tavalla.

$A_j \in \mathfrak{M}$ ovat erillisiä,

$$|\nu_s|(E) \geq \sum_j |\nu_s(A_j \cap E)| = \sum_j |\int_{A_j \cap E} s\,d\mu| = \sum_j |a_j|\mu(A_j \cap E) = \int_E |s|\,d\mu =: \lambda_s(E),$$

joten tämän ja 1^o:n perusteella $|\nu_s| = \lambda_s\ \forall s \in \mathrm{SMF} \cap L^1$ ("Simple Measurable Functions"). Toisaalta 1^o todistaa, että kuvaus $T : L^1(\mu) \ni f \mapsto \nu_f \in M(\mathfrak{M})$, missä $M(\mathfrak{M})$ on $\mathfrak{M}$:llä määriteltyjen kompleksisten mittojen normiavaruus kokonaisvariaationormilla (selvästi normiavaruus), on paitsi (selvästi) lineaarinen myös jatkuva ($\|\nu\|_M := |\nu|(X) \leq \|\lambda_f(X)\| = \|f\|_1$, ts. kuvauksen normi on enintään 1). Jos nyt $f \in L^1$, voidaan valita $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s.e. $\mathrm{SMF} \ni s_n \underset{L^1(\mu)}{\to} f$ [R2:3.13], jolloin jatkuvuuden perusteella

$$|\nu_f|(E) = \lim_n |\nu_{s_n}|(E) = \lim_n \int_E |s_n|\,d\mu \overset{*}{=} \int_E |f|\,d\mu =: \lambda_f(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}.$$

Kohta $*$ seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta, jos valitaan $s_n := \sum_{j=1}^n t_n$, missä funktiot t_n on valittu kuten kaavassa [R2:2.24(3)].[14]

Toinen tapa todistaa sama olisi todeta, että $L^1(\mu) \ni f \mapsto \int_E |f|\,d\mu \in \mathbb{C}$ on jatkuva, koska

$$|\int_E |f|\,d\mu - \int_E |g|\,d\mu| = |\int_E |f| - |g|\,d\mu| \leq \int_E ||f| - |g||\,d\mu \leq \int_E |f - g|\,d\mu \leq \|f - g\|_1 < \epsilon,$$

kun $\|f - g\|_1 < \delta_\epsilon := \epsilon$ (ts. $d(f, g) < \delta$), ja todeta näin $\int_E |f|\,d\mu$ ja $|\nu_f|(E)$ samoiksi $\forall f \in L^1$, koska ne ovat samoja tiheässä osajoukossa $\mathrm{SMF} \cap L^1$ ja jatkuvia koko L^1:ssä.

[14]Huijausta; oikeastaan ne pitää valita erikseen $(\mathrm{Re}\, f)^+$:lle, $(\mathrm{Re}\, f)^-$:lle, $(\mathrm{Im}\, f)^+$:lle ja $(\mathrm{Im}\, f)^-$:lle ja laskea yhteen (siis $s_n := \sum_{j=1}^n (t_n - t_n' + it_n'' - it_n''')$). Tällöin $s_n \to f$ dominoidun konvergenssin perusteella (majorantti $f \in L^1$) ja $*$-väite seuraa yhtä hyvin dominoidusta kuin monotonisesta konvergenssista (näin tehtiin myös [R2:3.13]:n todistuksessa).