Mat-1.150 Reaalianalyysi: 7. harj. vastauksineen ma 8.3.1999 (3 sivua)

Tehtävä 7.1 ([4.26] *helppo, nopea*):
Olkoon $L^2([-\pi,\pi])$ Hilbert-avaruus sisätulolla

$$(f,g) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Laske funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ Fourierin kertoimet ortonormaalin joukon $\{e_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ suhteen, missä $e_j(x) := e^{ijx}$.

Vastaus: $\hat{f}(0) := (f,e_0) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e_0}\,dx = 0$. Jos $j \neq 0$, niin

$$\hat{f}(j) := (f,e_j) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e_j(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ijx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\Big|_{-\pi}^{\pi} x\frac{e^{-ijx}}{-ij} - \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\frac{e^{-ijx}}{-ij}\,dx\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{-ij}[e^{-ij\pi} - e^{ij\pi}] - \Big|_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ijx}}{(-ij)^2}\right]$$

$$\overset{e^{it}=\cos t+i\sin t}{=} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{-ij}2\cos j\pi - 0\right] = \frac{\cos j}{-ij} = (-1)^j/-ij = i(-1)^j/j.$$

Kommentteja: Tämä on siis f:n “Fourierin sarja”, kuten kolmosperuskurssilla opetettiin. Siis $\sum_{0\neq j=-N}^{N} i\frac{(-1)^j}{j}e^{ijt} \to x$ normissa L^2 [R2: 4.26] kun $N \to \infty$ (ja siis jokin osajono pisteittäin m.k. [R2: 3.12]). Enemmänkin voidaan todistaa [Katznelson].

Tehtävä 7.2 ([4.10] *keskitasoa, lyhyehkö*):
Olkoon $n \in \mathbb{N} := \{1,2,3,...\}$ kiinteä ja $A = \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \sum_{j=1}^{n}(-1)^j x_j = 1\}$. Osoita, että A:ssa on yksikäsitteinen normin minimoiva alkio, ja etsi se.

Vastaus: $y_j := y(j) := (-1)^j\chi_{j\le n}$, jolloin $(x,y)_{\ell^2} := \sum_{j\in\mathbb{N}}\overline{y(j)}x(j) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j x_j$. Niinpä $A = \{x \in \ell^2 \mid (x,y) = 1\}$. $(\cdot,y) \in \mathcal{L}(\ell^2,\mathbb{C})$ [R2: 4.6] joten $A = (\cdot,y)^{-1}[\{1\}]$ on suljettu (koska suljetun joukon jatkuva alkukuva) ja konveksi (koska konveksin lineaarinen alkukuva, ks. Lemma 1).

$(y,y) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$, joten $y/n \in A$ ja $\|y\|_{\ell^2} = \sqrt{n}$. Jos $z \in A$, niin $\|z\| \geq |(z,y)|/\|y\| = 1/\sqrt{n}$ (Schwarz). Nyt $\|y/n\|_{\ell^2} = (1/n)\|y\| = 1/\sqrt{n}$, joten y/n on normin minimoiva alkio. Koska ℓ^2 on Hilbert-avaruus [R2:4.5b], y/n on yksikäsitteinen [R2:4.10],[1] QED. □

Lemma 1 *Olkoot X ja Y vektoriavaruuksia ja $T : X \to Y$ lineaarinen (eli (vektori)homomorfismi). Jos $E \subset Y$ on konveksi (eli $y,y' \in E \wedge t \in]0,1[\Longrightarrow (1-t)y + ty' \in E$), niin $T^{-1}E \subset X$ on konveksi.*

Huom.: vastaava pätee toiseenkin suuntaan ja monelle muullekin ominaisuudelle.

Todistus: Jos $x,z \in T^{-1}E$ ja $t \in]0,1[$, niin $T((1-t)x+tz) = (1-t)Tx + tTz \in E$ (koska E on konveksi ja $Tx, Tz \in E$), niinpä $(1-t)x + tz \in T^{-1}E$ eli $T^{-1}E$ on konveksi. □

Tehtävä 7.3 ([5.4] *keskitasoa, keskipitkä*):
(a) Näytä, että $A = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(0) = 0 \wedge \int_0^1 f(x)\,dx = 1\}$ on suljettu ja konveksi joukko sup-normilla varustetussa avaruudessa $\mathcal{C}([0,1])$.
(b) Osoita, että A:ssa ei ole normin minimoivaa alkiota.

Vastaus: (a) $v : \mathcal{C} \ni f \mapsto \int_0^1 f\,dm \in \mathbb{C}$ on selvästi lineaarinen (funktionaali). Se on jatkuva [R2:5.4], koska

$$|v(f)| = |\int_0^1 f\,dm| \leq \int_0^1 |f|\,dm \leq \int_0^1 \|f\|_{\mathcal{C}}\,dm = \|f\|_{\mathcal{C}}.$$

$\Lambda f := f(0)$. Selvästi Λ on lineaarinen (funktionaali). $\|\Lambda f\|_{\mathbb{C}} := |\Lambda f| := |f(0)| \leq \sup|f| =: \|f\|_{\mathcal{C}}$, joten Λ on rajoitettu eli jatkuva [R2:5.4]. $\Lambda^{-1}[\{1\}]$ on suljettu, koska se on suljetun joukon alkukuva. Samoin $v^{-1}[\{1\}]$ on suljettu, joten näiden leikkaus <u>A on suljettu</u>.

<u>A on konveksi</u>: Olkoon $f,g \in A \wedge t \in]0,1[\wedge h = (1-t)f + tg$. Lineaarisuuden perusteella $\Lambda h = (1-t)\Lambda f + t\Lambda g = 0$. $v(h) = \int[(1-t)f + tg] =$

[1] Tapa 2: Jos $z \in A$, niin $z = Pz + Qz$, missä $Pz \in \{\alpha y \mid \alpha \in \mathbb{C}\} =: M$ ja $Qz \in M^{\perp}$. Toisaalta $1 = (z,y) = (Pz,y) + (Qz,y) = (Pz,y)$, joten $Pz = (1/n)y$. Niinpä $\|z\|^2 = (y/n + Qz, y/n + Qz) = \|y/n\|^2 + \|Qz\|^2$, joten minimi saavutetaan vain kun $Qz = 0$ eli $z = Pz = y/n$.

$(1-t)\int f + t\int g = (1-t)1 + t\cdot 1 = 1$. Niinpä $h \in A$.

(b) 1°: $\inf_{f\in A} \|f\|_C \le 1$:

$$a_r := (1-r/2)^{-1}, \; f_r(t) = \begin{cases} a_r t/r, & \text{kun } 0 \le t < r; \\ a_r, & \text{kun } r \le t \le 1. \end{cases}$$

$f_r(0) = 0$ ja $\int_0^1 f_r = \int_0^r a_r t/r + \int_r^1 a_r = r\cdot a_r/2 + (1-r)a_r = a_r(1-r/2) = 1$, joten $f_r \in A \; \forall r \in]0,1[$. $\|f_r\|_C = a_r \to 1+$, kun $r \to 0+$, joten $\inf_{f\in A}\|f\|_C \le 1$ $(*)$.

2°: $f \in A \implies \|f\|_C > 1$ (joten infimumia ei saavuteta eli minimiä ei ole): Jos $f \in A$, niin välttämättä $\|f\|_C \ge 1$, koska $1 = \int_0^1 f \le \int_0^1 \sup|f| = \sup|f| =: \|f\|_C$. Siis $\inf_{f\in A}\|f\|_C \ge 1$ $(**)$. $(*) \wedge (**) \implies \inf_{f\in A}\|f\|_C = 1$.

Toisaalta yhtäsuuruus yllä vaatisi, että $0 = \int_0^1 \sup|f| - \int_0^1 f = \int_0^1 (\sup|f| - f)$ eli $\sup|f(t)| - f(t) = 0$ m.k. t eli $\forall t$, koska f on jatkuva.[2] Siis tällöin olisi $f(t) = \sup|f(t)|$ =vakio $\forall t \in [0,1]$, jolloin ei voisi olla $f \in A$ (koska muutoin $f(0) = 0$ jne.). Siis ei ole alkiota $f \in A$, jolla $\|f\|_C = 1 = \inf_{f\in A}\|f\|_C$, QED.

Tehtävä 7.4 ([Luku4] *helpohko, pitkähkö*):
[R2: Exercise 4.15] Määrää $m^2 := \min_{a,b,c\in\mathbb{C}} \int_0^\infty |x^3 - a - bx - cx^2|^2 e^{-x}\,dx$.[3]

Vastaus: $X := \mathbb{R}_+$, $d\mu := e^{-x}\,dm$ [R2: 1.29], jolloin $m := \min_{a,b,c}\|x^3 - (a + bx + cx^2)\|_H$, missä $H := L^2(\mu)$ (siis skalaaritulolla $(f,g)_H := \int_X f\bar{g}\,d\mu = \int_X f\bar{g}e^{-x}\,dm$).

Siis on etsittävä x^3:n projektio Px aliavaruudessa $M := \text{span}\{1, x, x^2\} := \{a + bx + cx^2 \mid a,b,c \in \mathbb{C}\}$ [R2: 4.11(b)], ja laskettava $m = \|x^3 - Px\|_H = \|Qx\|_H$.

Lasketaan M:n ortonormaali kanta $\{u_0, u_1, u_2\}$: $\phi_0 := 1 \implies \|\phi_0\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}_+} 1e^{-x}\,dm = 1$, joten valitaan vaikkapa $u_0 = \phi_0 \equiv 1$.

Olkoon $f_1 := x$.

$$(f_1, u_0) = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1! = 1$$

(Huom.: $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$ (osittaisintegrointi tai Gamma-funktion määritelmä).) Merkitään $g_1 := f_1 - (f_1,u_0)u_0 = x - 1$, jolloin $(g_1, u_0) = (f_1,u_0) - (f_1,u_0)(u_0,u_0) = 0$. Nyt $\|g_1\|^2 = \int_0^\infty (x^2 - 2x + 1)e^{-x}\,dx = 2! - 2 + 1 = 1$, joten voidaan valita $u_1(x) = g_1(x) = x - 1$ (ortonormeerattu u_0:n kanssa).

$f_2 := x^2$. $(f_2, u_0) = 2! = 2$, $(f_2, u_1) = (x^2, x) - (x^2, 1) = 3! - 2! = 4$, joten valitaan $g_2 := f_2 - (f_2,u_0)u_0 - (f_2,u_1)u_1 = x^2 - 2 - 4(x-1) = x^2 - 4x + 2$ (poistetaan u_0:n ja u_1:n suuntaiset komponentit) jotta $(g_2, u_0) = 0 = (g_2, u_1)$ (kuten yllä). Koska $\|g_2\|_H^2 = 4! - 2\cdot 4\cdot 3! + 2\cdot 2\cdot 2! + 4^2\cdot 2! - 2\cdot 4\cdot 1! + 4 = 4$, valitaan $u_2 := g_2/2 = x^2/2 - 2x + 1$.[4]

Löysimme nyt (H:ssa) ortonormaaliset (Legendren polynomit) u_0, u_1, u_2 (käytimme (muistaakseni) Grammin–Schmidtin prosessia, joka aina tepsii (tehdään riippumattomista $x_0, \dots, x_n$ niiden virittämän aliavaruuden ortonormeerattu kanta $u_0, \dots u_n$)[R2: Exercise 4.2]).

Lauseen [R2: 4.14] perusteella lausekkeen $m := \min_{f\in M}\|x^3 - f\|_H = \|x^3 - s_F\|_H =$, missä $s_F := (x^3, u_0)u_0 + (x^3, u_1)u_1 + (x^3, u_2)u_2 = 3!u_0 + (4! - 3!)u_1 + (5!/2 - 2\cdot 4! + 3!)u_2 = 6 + 18(x-1) + (60 - 48 + 6)(x^2/2 - 2x + 1) = 6 - 18x + 9x^2$. Siis $m^2 = \|x^3 - 9x^2 + 18x - 6\|_H^2 = \dots = 36$ (huom.: tästä nähdään, että voitaisiin valita $u_3 = [x^3 - 9x^2 + 18x - 6]/6$).

Tehtävä 7.5 ([5.2] *keskitasoa, keskipitkä*):
[R2:Exe5.3] **(a)** Olkoon $1 < p < \infty$. Todista, että $L^p(\mu)$:n yksikköpallo on aidosti konveksi, ts. että

$$\|f\|_p = 1 = \|g\|_p \wedge f \ne g \wedge h = \frac{1}{2}(f+g) \implies \|h\|_p < 1.$$

(Geometrinen tulkinta: yksikköpallon pinnalla ei ole suoria.)[5]

[2] Jos kaksi jatkuvaa funktio $[0,1] \to \mathbb{C}$ ovat samat m.k.$[m]$, ne ovat samat kaikkialla (htl). Huom.: $\sup|f| - f \ge 0$. Jos $g \ge 0$ ja $\int g = 0$, niin $g = 0$ m.k., koska jos $E := \{x \mid g(x) > 0\}$ on positiivimitallinen, niin on myös $\mu(E_n) > 0$ jollain $n \in \mathbb{N}_+$, missä $E_n := \{x \mid g(x) > 1/n\}$, koska $E = \cup_n E_n$. Tästä seuraa, että $\int g \ge \int_{E_n} g \ge \int_{E_n} 1/n = \mu(E_n)/n > 0$, mikä on ristiriita (jos $\int g = 0$).

[3] Vihje: [R2: 1.29].

[4] Huom.: $\{u_0, u_1, u_2\}$ ovat Legendren polynomit. Kaikki sellaiset saataisiin kaavasta $\frac{1}{n!}(-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}]$ [Fysiikan matemaattiset menetelmät].

[5] Vihje: Millä edellytyksillä Minkovskissa on yhtäsuuruus (ks. [R2:s.65&64])?

(b) Päteekö tämä yleensä $L^1(\mu)$:ssä? $L^\infty(\mu)$:ssä? $\mathcal{C}_b(X)$:ssä (rajoitetut jatkuvat fkt sup-normilla)? Edes tavanomaisilla μ, X ja $\mathcal{T}$.

Vastaus: Tässä funktioita ajatellaan joukon $L := L(\mu)$ (mitallisten funktioiden ekvivalenssiluokat) alkioina, siis funktioiden yhtäsuuruudet tarkoittavat yhtäsuuruuksia m.k.[6]

(a) Jos $0 < \lambda < 1$ ja $\|f\|_p = 1 = \|g\|_p$, niin $1 = \|\lambda f\|_p + \|(1-\lambda)g\|_p$, joten ehdosta $1 = \|\lambda f + (1-\lambda)g\|_p = 1$, niinpä tällöin Lemman M perusteella $\lambda f = \gamma(1-\lambda)g$ eli $f = \frac{\gamma(1-\lambda)}{\lambda}g$, joten $f = g$ (koska $\|f\|_p = 1 = \|g\|_p$), niinpä L^p:n yksikköpallo on aidosti konveksi (tässä siis X ja μ saivat olla mitä tahansa; huom.: totesimme, että koko yhdysjana $f...g$ on pallon sisällä, ei vain keskipiste), QED.

Lemma M *Olkoon $f, g \in L^p(\mu)$. $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ (eli Minkovski ei ole aito) joss ($g = 0$ m.k. tai $\exists \gamma \geq 0$ ($f = \gamma g$ m.k.)).*

Siis joss g ja f ovat lineaarisesti riippuvia $L^p(\mu)$:ssa (eli joss $\alpha g + \beta f = 0$ (m.k.) $\not\Longrightarrow \alpha = 0 = \beta$).

Todistus: Hölderin epäyhtälössä on yhtäsuuruus joss f^p ja g^q ovat lineaarisesti riippuvia (L:ssä, siis m.k.) [R2:3.5,s.90][7]. Tästä voidaan päätellä että Minkovskin epäyhtälössä on yhtäsuuruus joss f ja g ovat lineaarisesti riippuvia (tässä $f, g \geq 0$).

Jos sitten $f, g \in L^p(\mu)$, niin

$$\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p = \|\,|f|\,\|_p + \|\,|g|\,\|_p \Longrightarrow \int |f+g|^p = \int ||f|+|g||^p$$

$$\Longrightarrow \int [||f|+|g||^p - |f+g|^p] = 0 \overset{R2:1.39b}{\Rightarrow} ||f|+|g||^p - |f+g|^p = 0 \text{ m.k.}$$

$$\Longrightarrow |f(x)| + |g(x)| = |f(x)+g(x)| \text{ m.k. } x.$$

Toisaalta edellisen kappaleen perusteella $|f| = \gamma|g|$ jollain $\gamma \geq 0$ (ellei $g = 0$). Ainahan $z, w \in \mathbb{C} \wedge |z+w| = |z| + |w| \Rightarrow \arg(z) = \arg(w)$, joten $f(x) = |f(x)| \arg(f(x)) = \gamma|g(x)| \arg(g(x)) = \gamma g(x)$ m.k. x. (Ehdon riittävyyskin käy ilmi edellisestä kappaleesta.) $\square$

(b) Yleensä ei päde (alaviitteessä mainittu eräs tapaus, jossa pätee):

$L^1(\mathbb{R}^1)$-esimerkki: $f := \chi_{[0,1]}$, $g := \chi_{[1,2]}$, jolloin $h = \frac{1}{2}\chi_{[0,2]}$ (L^1:ssä eli m.k.) mutta $\|h\|_1 = 1$ (vaikka $f \neq g$).

$L^\infty(\mathbb{R}^1)$-esimerkki: $f := \chi_{[0,1]}$, $g := \chi_{[0,2]}$, jolloin $\|h\|_\infty = 1$ vaikka $f \neq g$.

Yleinen todistus: Olkoot $\mu(A), \mu(B) \in]0, \infty[$ ja $\mu(A \setminus B) > 0$ (tällaiset A, B löytyy miltei joka $(X, \mathfrak{M}, \mu)$:stä, esim. $(\mathbb{R}^k, m)$).[8]

L^∞: $h = \frac{1}{2}(\chi_{A\cup B} + \chi_B) \Rightarrow h_{|_B} = 1 \wedge \|h\|_\infty = 1$, vaikka $\chi_{A\cup B} - \chi_B = \chi_{A\setminus B} \neq 0$ m.k. (ts. $\neq 0$ avaruudessa L^∞) eli $f \neq g$.

L^1: $f := \chi_A/\mu(A)$, $g := \chi_B/\mu(B) \Rightarrow \|h\|_1 = 1$ vaikka $f \neq g$ (kuten L^∞:ssä).

$\mathcal{C}_b, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_c$: $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^1)$-esimerkki: $f \equiv 1$, $g(x) := x\chi_{[0,1]} + \chi_{]1,\infty[}$, jolloin $\|h\| := \sup \|h\| = 1$.

Yleinen todistus: Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorff-avaruus (esim. $\mathbb{R}^k$ tai (diskreetin topologian) $\mathbb{N}$ tai $\{0, ..., n-1\}$), jossa on kaksi erillistä epätyhjää avointa joukkoa V ja V'. Valitaan $x \in V$ ja $x' \in V'$. Olkoot $f, g \in \mathcal{C}_c$ s.e. $\chi_{\{x\}} \leq f \leq \chi_V \wedge \chi_{\{x,x'\}} \leq g \leq \chi_{V\cup V'}$ [R2:2.12 = Urysohnin lemma]. Tällöin $h(x) = 1$, joten $\|h\| := \sup |h| = 1$.

---

[6] **Esimerkki**: Olkoon $X = \{0, ..., k-1\}$ ja μ =lukumäärämitta eli $L^p(\mu) = (\mathbb{C}^k, |\cdot|_p)$ (ht). Tutkitaan reaalista tapausta (todistukset aivan samat kuin kompleksisessa mutta kuvien piirtäminen helpompaa). Arvolla $k = 2$ saadaan tavallinen euklidinen normi eli yksikköympyrä on todella ympyrä $\mathbb{R}^2$:ssa. $|(x,y)|_1 = |x| + |y|$, joten $|\cdot|_1$-yksikköympyrä on kärjellään seisova neliö, $|\cdot|_\infty$-yksikköympyrä on neliö ja muut kaarevia sillä välillä, siis reunimmaiset eivät ole aidosti konvekseja (vaan sisältävät suoria; konvekseja ne sentään ovat), muut ovat. Arvolla $p < 1$ normi $|(x,y)|_p^p := \int_{\{0,1\}} |(x,y)|^p\, mu = |x|^p + |y|^p$ antaakin koveran version $|\cdot|_1$-yksikköympyrästä, ts. se ei ole edes konveksi.

Myöskään $L^p([0,1])$:ssä ei ole avoimia konvekseja joukkoja (paitsi $\emptyset$ ja $L^p([0,1])$), kun $0 < p < 1$ [R3: 1.47], niinpä 0 on ainoa jatkuva lineaarikuvaus $L^p \to Y$, kun Y on normiavaruus [R3: s. 36].

[7] Kirjan kaavoissa (9) ja (9') oltava yhtäsuuruus, ts. parien $(f^p, (f+g)^p)$ ja $g^p, (f+g)^p$ on oltava lineaarisesti riippuvia eli parien $(f, f+g)$ ja $g, f+g$ eli parien (f, g) ja (f, g))

[8] Jos $X = \{\text{Stigu}\}$ lukumäärämitalla σ ja $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X\}$, niin kaikki funktiot $f : X \to \mathbb{C}$ (jopa $f : X \to Y$) ovat aina jatkuvia, koska alkukuvat ovat aina X tai $\emptyset$, siis avoimia; siksipä $\mathbb{C} \cong L^1(\sigma) = L^\infty(\sigma) = \mathcal{C}_b(X) = \mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}_c(X) = \mathcal{C}(X)$ (kussakin näistä on siis vain vakiofunktiot ja normikin vastaa $\mathbb{C}$:n itseisarvoa), jolloin yksikköympyrä onkin aidosti konveksi (koska $\mathbb{C}$:n itseisarvo eli (euklidinen) $|\cdot|_2$-normi on).