Mat-1.150 Reaalianalyysi: 5. harj. vastauksineen ma 22.2.1999 (2 sivua) Laskuharjoituksia on 12, taukoa on vain pääsiäisenä. Välikoealueet ilmoitetaan myöhemmin (1. vk. 29.3. klo 12–15, (tuolloin laskuharjoitus pidetään klo 15.15–17 huoneessa U325 tms.), 2. vk. ke 12.5. 13–16.

Tehtävä 5.1 ([2.24] *helpohko, lyhyehkö*):
Lusinin lauseen [2.24] todistus herättää seuraavat kysymykset:
(a) Todistuksen alkuosassa oletetaan A kompaktiksi. Miksi? Eikö $\mu(A) < \infty$ riitä?
(b) Mihin joukkoa V tarvitaan? Onko selvää, että on olemassa sellainen avoin V, että $A \subset V$ ja $\bar{V}$ on kompakti?[1]

Vastaus: (a) Jos vaikkapa $A = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$ ja $\mu = m$, niin $m(A) = 0$, mutta mikään A:n sisältävä suljettu joukko $\bar{V}$ ei voi olla kompakti, koska tällöin $\bar{V} \supset \bar{A} = \mathbb{R}$ eli $\bar{V} = \mathbb{R}$.
(b) Kompaktisti sulkeutuvaa V tarvittiin siihen, että g:n kantaja saatiin rajattua kompaktiin joukkoon.
V:n olemassaolo todistetaan seuraavasti: Esimerkki: Jos olisi $X = \mathbb{R}^k$, niin $V := B(0, 1+\sup_{a\in A}|a|) := \{x \in X \mid |x| < 1+\sup_{a\in A}|a|\}$ kelpaisi ($A \subset V \overset{\circ}{\subset} X$ ja $\bar{V} \subset_K X$).
Yleinen todistus: Lauseen edellä kerrottiin oletettavan, että X on lokaalisti kompakti, ts. jokaisella pisteellä on ympäristö W, jonka sulkeuma on kompakti.[2] Poimitaan jokaiselle $a \in A$ tällainen $W_a \overset{\circ}{\subset} X$. $A \subset \cup_{a\in A} W_a$, joten A:n kompaktisuuden perusteella ko. avoimen peitteen äärellinen osapeite $W_{a_1} \cup ... \cup W_{a_n} =: V$ peittää A:n. $K := \bar{W}_{a_1} \cup ... \cup \bar{W}_{a_n}$ on kompakti (htll) ja suljettu (htll tai [R1:Th2.24]), joten $\bar{V} \subset K$, joten $\bar{V}$ on kompakti [Th2.4].

[1]Vihje: (a) tee vastaesimerkki (ei-kompakti A), jossa b-kohdan joukkoa $\bar{V}$ ei saada kompaktiksi. (b) Käytä ensin X:n lokaalia kompaktisuutta ja sitten A:n on kompaktisuutta.

[2]Joissain teoksissa määritelmä kuuluu "$\forall x \in X$ on olemassa kompakti $K \subset X$ s.e. $x \in K^o$". Määritelmät ovat ekvivalentteja Hausdorff-avaruuksissa ja muunlaisia ei juuri käytetä (mutta on olemassa eräs ei-Hausdorff-avaruus, jossa Rudinin määritelmä on aidosti vahvempi, kompaktit joukot eivätkä aina ole suljettuja eivätkä kompaktien joukkojen leikkaukset kompakteja).

Tehtävä 5.2([3.1]*keskitasoa, lyhyehkö*):
Olkoon $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Osoita, että jokaisella konveksilla $\phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ on jokaisessa pisteessä $t \in]a,b[$ oikeanpuoleinen derivaatta $\frac{d^+}{dt}\phi(t)$ ja vasemmanpuoleinen derivaatta $\frac{d^-}{dt}\phi(t)$ ja että $\frac{d^-}{dt}\phi(t) \leq \frac{d^+}{dt}\phi(t)$.[3]

Vastaus: Konveksilla funktiolla ϕ pätee aina $\forall \lambda \in [0,1],\ x, y \in]a,b[$
$$\phi(x + \lambda(y-x)) = \phi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\phi(x) + \lambda\phi(y) = \phi(x) + \lambda(\phi(y) - \phi(x)).$$
Lisäksi $t < u \leq v < b \implies \frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} \leq \frac{\phi(v)-\phi(t)}{v-t}$ (*) eli sekantin kulmakerroin on kasvava, koska (merkitään $\lambda := \frac{u-t}{v-t}$)
$$\frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} = \frac{\phi(t+\lambda(v-t)) - \phi(t)}{\lambda(v-t)}$$
$$\leq \frac{\phi(t) + \lambda[\phi(v)-\phi(t)] - \phi(t)}{\lambda(v-t)} \leq \frac{\lambda[\phi(v)-\phi(t)]}{\lambda(v-t)}.$$
Olkoon $a < t < b$. Koska yo. kulmakerroin on kasvava (eli laskeva kun $u \to t+$), niin lim = inf eli $\frac{d^+\phi}{dt}(t) := \lim_{u\to t+} \frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} = \inf_{u>t} \frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} < \infty$. Valitaan $t' \in]a,t[$. Kaavan [R2:3.1(2)] perusteella $\frac{\phi(t)-\phi(t')}{t-t'} \leq \frac{d^+\phi}{dt}(t)$, joten $\frac{d^+\phi}{dt}(t) > -\infty$.
Aivan samoin nähdään, että $\frac{d^-}{dt}\phi(t) = \sup_{s<t} \frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s}$. Kaavan [R2:3.1(2)] perusteella $\frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} \leq \frac{d^+}{dt}\phi(t)\ \forall s \in]a,t[$ ja siis $\frac{d^-}{dt}\phi(t) \leq \frac{d^+}{dt}\phi(t)$.
(Huom.: $\exists \phi'(t) \iff \frac{d^-}{dt}\phi(t) = \frac{d^+}{dt}\phi(t)$.)

Tehtävä 5.3 ([3.1] *vaikeahko, lyhyehkö*):
[R2:Exe3.3] Osoita, että jos $\phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ on jatkuva ja toteuttaa ehdon
$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi(y))\ \forall x, y \in]a,b[\quad (*),$$
niin ϕ on konveksi (jatkuvuus on olennainen vaatimus)[4].

Vastaus: (Ratkaisun idea: Konveksisuusehto pätee, kun $\lambda = 1/2$. Yleistetään induktiolla 2^{-n}:n monikertoihin $\lambda = k2^{-n}$ ja sitten jatkuvuuden perusteella

[3]Vihje: $\frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} \leq \frac{\phi(v)-\phi(u)}{v-u}$, kun $t < u < v$ [R2:3.1(2)]. Huom.: $\phi : x \mapsto |x|$ on konveksi mutta $\frac{d^-\phi}{dt}(0) := \lim_{s\to t-} \frac{|s|-0}{s-0} = \lim_{s\to t-} \frac{(-s)-0}{s-0} = -1 < 1 = \frac{d^+\phi}{dt}(0)$.

[4]Ks. [R2: Notes and Comments: Ch. 3, s. 398]. Vastaesimerkki hyödyntänee tekijäryhmiä $\mathbb{R}/\mathbb{Q} := \{r + \mathbb{Q} \mid r \in \mathbb{R}\}$ ja valinta-aksioomaa.

kaikkiin $\lambda \in [0,1]$.)

Lemma*Kun $x, y \in]a,b[$, niin konveksisuusehto pätee kun $\lambda = k2^{-n}$ eli $k, n \in \mathbb{N}_+ \wedge k \le 2^n \implies \phi(x + k2^{-n}(y-x)) \le \phi(x) + k2^{-n}(\phi(y) - \phi(x))$.*

Tod.: (induktiolla) 1° $n = 1$: tosi oletuksen perusteella.
2° $n = m$ OK $\implies n = m+1$ OK: Jos $k = 2i$ ($i \le 2^n/2 = 2^m$), niin $k2^{-n} = i2^{-m}$ ja väite on tosi tapauksen $n = m$ perusteella. Jos $k = 2i+1$ ($i < 2^n/2 = 2^m$), niin

$$\begin{aligned}\phi\left(x + k2^{-n}(y-x)\right) &= \phi\left(\frac{1}{2}[x + i2^{-m}(y-x) + x + (i+1)2^{-m}(y-x)]\right)\\ &\overset{*}{\le} \frac{1}{2}\phi\left(x + i2^{-m}(y-x)\right) + \frac{1}{2}\phi\left(x + (i+1)2^{-m}(y-x)\right)\\ &\overset{\text{ind.ol.}}{\le} \frac{1}{2}\{\phi(x) + i2^{-m}[\phi(y)-\phi(x)]\} + \frac{1}{2}\{\phi(x) + (i+1)2^{-m}[\phi(y)-\phi(x)]\}\\ &= \phi(x) + (2i+1)2^{-m-1}[\phi(y)-\phi(x)]. \qquad \square\end{aligned}$$

Jos nyt $x, y \in]a,b[$ ja $0 \le \lambda \le 1$, niin on olemassa rationaalilukujen $r_j = k_j 2^{-n_j}$ jono s.e. $r_j \to \lambda$ (esim. $r_j := \lfloor 2^j\lambda \rfloor 2^{-j} \implies 0 \le \lambda - r_j = 2^{-j}(2^j\lambda - \lfloor 2^j\lambda \rfloor) < 2^{-j} \to 0$), joten

$$\begin{aligned}\phi(x + \lambda(y-x)) &= \lim_{j\to\infty} \phi(x + r_j(y-x))\\ &\le \lim_{j\to\infty} \{\phi(x) + r_j[\phi(y)-\phi(x)]\} = \phi(x) + \lambda[\phi(y)-\phi(x)].\end{aligned}$$

Tehtävä 5.4 ([3.6] *helppo, erittäin lyhyt, hyvä*):
Olkoon $0 < p < \infty$. Olkoon $f : X \to \mathbb{C}$ mitallinen ja $\|f\|_p^p := \int_X |f|^p \, d\mu < \infty$ (eli $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$). Osoita, että jokaisella $\epsilon > 0$

$$\mu(\{x \mid |f(x)| \ge \epsilon\}) \le \epsilon^{-p} \int_X |f|^p \, d\mu.$$

(Todennäköisyyslaskennassa tämä epäyhtälö on tunnettu Tšebyševin[5] epäyhtälönä.)

[5]Pafnuti Tšebyšev, 1821–94. Virallinen translitterointi olisi "Čebyšev", mutta translitteroitaessa kyrillisiä kirjaimia latinalaisiksi suomalaisissa (etenkin ei-tieteellisissä) julkaisuissa on tapana tehdä mm. korvaus č↦tš.

μ on todennäköisyysmitta joss $\mu(X) = 1$, jolloin $\mu(E)$ on "todennäköisyys, että jokin $x \in E$ tapahtuu" (esim. X = lottopallot, E = numerot 11–20).

Vastaus: $A_\epsilon := \{x \mid |f(x)| \ge \epsilon\}$.

$$\mu(A_\epsilon) = \int_{A_\epsilon} 1 \, d\mu = \epsilon^{-p} \int_{A_\epsilon} \epsilon^p \, d\mu \le \epsilon^{-p} \int_{A_\epsilon} |f|^p \, d\mu \le \epsilon^{-p} \int_X |f|^p \, d\mu, \quad \text{QED.}$$

(Huom.: jos $f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^p$ (ts. $\|f\|_p = \infty$), niin epäyhtälö on automaattisesti tosi. Se siis pätee kaikilla $f \in \mathcal{L}(\mu)$.)

Tehtävä 5.5 ([3.7] *vaikeahko, lyhyehkö*):
Olkoon μ X:n positiivinen mitta. Olkoon $\{f_n\}$ jono mitallisia funktioita $X \to \mathbb{C}$. Todennäköisyyslaskennassa sanotaan, että jono $\{f_n\}$ suppenee funktioon f *mitassa* (μ) (tai *(μ-)mitallisesti*), jos $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ s.e.

$$n \ge N \implies \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon.$$

Olkoon $\mu(X) < \infty$. Todista:
(a) Jos $f_n, f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $\forall n$ ja $\|f_n - f\|_p \to 0$, niin $f_n \to f$ mitassa μ ($1 \le p < \infty$). (b) Jos $f_n \to f$ m.k., niin $f_n \to f$ mitassa μ.

Vastaus: (a) Olkoon $\epsilon > 0$. Merkitään $A_n := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$. Koska $f_n \underset{L^p}{\to} f$, on olemassa $N = N_{\epsilon'} \in \mathbb{N}$ s.e. $n \ge N \implies \int_X |f_n - f|^p \, d\mu < \epsilon' := \epsilon^{p+1}$. Nyt

$$\begin{aligned} n \ge N \implies \mu(A_n) &= \int_{A_n} 1 \, d\mu = \epsilon^{-p} \int_{A_n} \epsilon^p \, d\mu\\ &\le \epsilon^{-p} \int_{A_n} |f_n - f|^p \, d\mu \le \epsilon^{-p} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu < \epsilon^{-p}\epsilon' = \epsilon, \text{QED.}\end{aligned}$$

(b) 1° Siis $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in N^c =: Y$, missä $0 = \mu(N)$ eli $\mu(Y) = \mu(X)$. Olkoon $\epsilon > 0$. Pitäisi löytää N s.e. $\mu(A_n) < \epsilon$ $\forall n \ge N$. Todistamme kohta vielä enemmän, että $\mu(\cup_{k=N}^\infty A_k) = \mu(X) - \mu(B_N) < \epsilon$, missä $B_n := X \setminus \cup_{k=n}^\infty A_k$.
2° $Y \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Tod.: Kun $x \in Y$, niin $\exists n$ s.e. $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$ $\forall k \ge n$, siis $x \in B_n$.
3° $\mu(\cup_n B_n) = \mu(X)$, koska $\mu(Y) \le \mu(\cup_n B_n) \le \mu(X) = \mu(Y)$, koska $Y \subset \cup_n B_n \subset X$.
4° Selvästi $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots$ (koska $B_n = \cap_{k=n}^\infty A_k^c$), joten $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\cup_{n=1}^\infty B_n) = \mu(X)$ [R2:1.19d]. Siksi $\mu(A_n) \le \mu(\cup_{k=n}^\infty A_k) = \mu(X) - \mu(B_n) \overset{n\to\infty}{\to} 0$, mistä seuraa väite (siis $\exists N \; \forall n \ge N \; (\mu(A_n) < \epsilon)$).