Mat-1.150 Reaalianalyysi: 4. harj. vastauksineen ma 15.2.1999 (3 sivua) $\mathcal{L}$:=mitalliset funktiot, $\mathcal{L}^p := \{f \in \mathcal{L} \mid \int |f|^p < \infty\}$ (X ja $\mathfrak{M}$ (ja μ $\mathcal{L}^p$:lle) spesifioitava. L ja L^p ovat vastaavat ekvivalenssiluokkien joukot. $G \overset{\circ}{\subset} X$: avoin, $F \overset{c}{\subset} X$ suljettu osajoukko.

Tehtävä 4.1 ([2.5] *helpohko, lyhyehkö*):
Osoita että Hausdorffin avaruuden kompakti osajoukko on suljettu.

Vastaus: Tapa 1: tod. kuten [2.5Cor(a)]. Tapa 2: Vastaoletus: $\exists a \in \bar{K} \setminus K$, missä $K \overset{K}{\subset} X$ (kompakti osajoukko).[1]

Kullakin $x \in K$ valitaan $V_x, W_x \overset{\circ}{\subset} X$ s.e. $x \in V_x \wedge a \in W_x \wedge V_x \cap W_x = \emptyset$ (Hausdorff-ominaisuus [2.3(e)]). $K \subset \cup_{x \in K} V_x$, joten $K \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}$, joten $K \cap W = \emptyset$, missä $W := W_{x_1} \cap \ldots \cap W_{x_n}$. Mutta tästähän seuraa, että $K \subset W^c \overset{c}{\subset} X$, joten $\bar{K} \subset W^c \not\ni a$, siis $a \notin \bar{K}$, ristiriita, QED.

Tehtävä 4.2 ([2.11] *helppo, lyhyt*):
Olkoon $V_j := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-j| < 1\}$, $j = 0,1,2,3$. $K := [-0.5, 3.5]$. Konstruioi $h_j \prec V_j$ s.e. $\sum_{j=0}^{3} h_j = 1\ \forall x \in K$.

Vastaus: Siis joukossa $[-1,4] \setminus K$ saa $\sum_{j=0}^{3} h_j$ olla mitä tahansa (kunhan $0 \le h_j \le 1$, $\operatorname{supp} h_j := \overline{\{h_j \neq 0\}} \subset V_j$ ja $h \in \mathcal{C}_c$). Piirrä kuva seuraavasta: Olkoon h_j:n kuvaaja puolisuunnikas, joka on paloittain lineaarinen ja saa arvot $0,1,1,0$ pisteissä $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ (h_0), $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}$ (h_1), $1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}$ (h_2), $2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}, 3\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2}$ (h_3). (Siis $h_0 := 4(x - (-\frac{3}{4}))\chi_{[-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}[} + 1\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}[} + 2(\frac{3}{4} - x)\chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}$ jne., jolloin $\operatorname{supp} h_0 = [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}] \overset{K}{\subset} V_0$ jne.).[2]

Tehtävä 4.3 ([2.10] *keskitasoa, lyhyehkö*):

[1] Selvästi joukko Y on suljettu joss $Y = \bar{Y}$.

[2] Huom.: Voitaisiin valita jopa $h_i \in \mathcal{C}_c^\infty$. Itse asiassa tämä onnistuu missä tahansa $\mathbb{R}^k$:n osajoukossa; ks. "partition of unity" (yksikön ositus) jostain distribuutiokirjasta, esim. [R3:Th6.20].

[R2:Exe2.21] Olkoon $X \neq \emptyset$ kompakti ja $f : X \to \mathbb{R}$ ylhäältä puolijatkuva. Osoita, että f saavuttaa maksiminsa X:n jossakin pisteessä.

Vastaus: "f on ylhäältä puolijatkuva" tarkoittaa, että $V_r := \{x \in X \mid f(x) < r\}$ on avoin $\forall r \in \mathbb{R}$.

$\beta := \sup f \le \infty$. Jos olisi $X \subset \cup_{M<\beta} V_M$, niin avoimen peitteen $\{V_M \mid M < \beta\}$ äärellinen osapeitekin peittäisi X:n eli $X \subset V_{M_1} \cup \ldots \cup V_{M_n}$, joten $f(x) < \max_{j \le n} M_n < \beta\ \forall x$, mikä on ristiriita ($\sup_x f(x) \le \max_{j \le n} M_n < \beta := f(x)$). Siis $f(x) = \beta$ jollain x, QED.[3][4]

Tehtävä 4.4 ([Luku 1] *keskitasoa, keskipitkä*):
Konstruoi sellainen välin $X := [0,1]$ Borel-mitta μ, että funktio $x \mapsto f(x) := x$ ei kuulu joukkoon $\mathcal{L}^1(\mu)$, mutta funktio $x \mapsto g(x) := x^2$ kuuluu ja lisäksi
(a) $E \cap \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}_+\} = \emptyset \Rightarrow \mu(E) = 0$;
(b) $\exists h \in \mathcal{L}$ ($h \ge 0 \wedge \mu(E) = \int_E h(x)\,dx\ \forall E \in \mathcal{B}$) [1.29], missä $\mathcal{B}$ on Borel-joukkojen perhe.
(c) Onko mahdollista toteuttaa (a) ja (b) yhtaikaa?[5]

Vastaus: Lemma *Jos ν on numeroituvan joukon A mitta, niin mitan σ-additiivisuuden perusteella $\nu(E) = \sum_{x \in E} \nu(\{x\}) = \sum_{x \in E} a_x\ \forall E \subset A$, missä $a_x := \nu(\{x\}) \in [0,\infty]\ \forall x \in A$. Nyt mon. konv. tai dom. konv. perusteella $\int_A F\,d\nu = \sum_{x \in A} F(x)\nu(\{x\}) = \sum_{x \in A} F(x) a_x$ (*), kun $F \ge 0$ (mon. konv.).*[6]

[3] Tästähän seuraa, että $\beta \in \mathbb{R}$, koska $f : X \to \mathbb{R}$.

[4] Tapa 2: kompaktien [2.4] epätyhjien $\{f \ge r\} \overset{c}{\subset} X$ ($r < \beta$) leikkaus K on epätyhjä [2.6] (muutoin olisi $\beta \le \max_n r_n < \beta$) ja $x \in K \implies f(x) = \beta$. Tapa 3: jos ei olisi maksimia, olisi $X \subset \cup_x W_x$, missä $W_x := \{y \mid f(y) \ge f(x)\}$...

[5] Tehtävä on ihan kiva, mutta jos mitallisuuksia katsellaan tarkkaan (kuten alla), niin homma menee työläämmäksi.

[6] Tai kun $\sum_{x \in A} |F(x)| a_x < \infty$ (i.e. $F \in L^1(\nu)$) (dom. konv.). Molemmat tapaukset todistetaan seuraavasti:
Olkoon $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$. $A_n := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Tällöin $F = \lim_n F_n$, missä $F_n := \chi_{A_n} F$, joten dominoitua konvergenssia voidaan soveltaa, jos esim. $|F| \in L^1$ (majorantti), ja sup-

(a) $A := \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}_+\}$. Koska $\nu := \mu|_{\mathcal{P}(A)}$ on $(A, \mathcal{P}(A))$:n mitta (htl), $\mu|_{\mathcal{P}(A)}$ on siis em. muotoa. Nyt $\mu(A^c) = 0$, joten $\int_X F\,d\mu = 0 + \int_A F\,d\mu = \sum_{x\in A} F(x)\mu(\{x\})\ \forall F \geq 0$ (*). Jos nyt valitaan $\mu(\{x\}) = 1\ \forall x \in A$, niin $\int_X f\,d\mu \stackrel{*}{=} \sum_{x\in A} f(x)\mu(\{x\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(\frac{1}{k}) \cdot 1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} = \infty$ ja $\int_X g\,d\mu \stackrel{*}{=} \sum_{x\in A} g(x)\mu(\{x\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\frac{1}{k})^2 < \infty$.

(b) $g(x) \to 0$ nopeammin kuin $f(x) \to 0$, kun $x \to 0+$, joten yritetään nytkin saada mitta räjähtämään äärettömiin nollassa, muttei liian nopeasti (aivan kuten (a)-kohdassakin):

$\int_X F\,d\mu = \int_X Fh\,dm\ \forall F \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M}); [0,\infty])$ [R2:1.29]. Jos nyt valitaan $h(x) = x^{-2}\chi_{]0,1]}(x) \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M}); [0,\infty[)$ (koska määritelty kahdessa jatkuvassa (siis Borel-mitallisessa) palassa).[7] $\int_0^1 f\,d\mu \stackrel{1.29}{=} \int_0^1 fh\,dm = \int_0^1 x^{-1} \stackrel{mon.konv.}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^{-1}\chi_{[\frac{1}{n},1]} = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 x^{-1} = \lim_{n\to\infty}(\ln 1 - \ln\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$, mutta $\int_X g\,d\mu = \int_X x^2 x^{-2} = \int_X 1 = 1 < \infty$.

(c) Ei ole mahdollista: jos (a) ja (b) olisivat tosia, niin olisi $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c) = \int_A h + 0 = 0 + 0 = 0$ (koska $m(A) = 0$, koska A on numeroituva) ja siis $\int_X f\,d\mu = 0$. [8]

Tehtävä 4.5 ([3.10] *vaikea, keskipitkä*):
[R2:Exe3.16] Olkoon $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ jono mitallisia funktioita $X \to \mathbb{C}$ s.e. $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall x \in X$. Olkoon $\mu(X) < \infty$. Todista Jegorovin (Egoroff) lause, eli että $\forall \epsilon > 0\ \exists E \in \mathfrak{M}$ s.e. $\mu(X \setminus E) < \epsilon$ ja $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti E:llä. (Vihje: [R2:teht. 3.16].)

Vastaus: [10] $S(n,k) := \cap_{i,j>n}\{x \in X \mid |f_i(x) - f_j(x)| < 1/k\} \in \mathfrak{M}$.
Merkitään jonon $\{f_n(x)\}$ raja-arvoa $f(x)$:llä $\forall x$. Olkoon $x \in X$. Oletuksen perusteella $\{f_n(x)\}$ on Cauchy-jono,[12] joten $\forall k \in \mathbb{N}_+\ \exists n \in \mathbb{N}_+$ s.e. $x \in S(n,k)$ (tämähän on Cauchy-jonon määritelmä, joskin siinä on yleensä $\epsilon > 0$ luvun $1/k > 0$ sijaan). Niinpä $\cup_{n\in\mathbb{N}_+} S(n,k) = X$, jos $k \in \mathbb{N}_+$.

Niinpä $\mu(S(n,k)) \stackrel{n\to\infty}{\to} \mu(X)$ [R2:1.19d] (koska $S(n,k) \subset S(n+1,k)\ \forall n,k$) jokaisella $k \in \mathbb{N}_+$, joten voidaan valita luvut n_k s.e. $\mu(S(n_k,k)) > \mu(X) - 2^{-k}\epsilon$. Olkoon $E := \cap_{k\in\mathbb{N}_+} S(n_k,k)$.[13]

---

peneminen on monotonista, jos $F \geq 0$.

Tuloksen olisi voinut todistaa myös ilman mon. konvergenssin lausetta: $\phi : x \mapsto \nu(\{x\})$ on σ-mitallinen funktio, missä $\sigma(\{x\}) = 1\ \forall x \in E$ ("lukumäärämitta"), ja ϕ indusoi mitan ν kuten [R2:1.29]:ssä, jonka perusteella myös $\int_E F\,d\nu = \int_E F\phi\,d\sigma = \sum F(x)\phi(x)\ \forall F \geq 0$.

[7](ht): Paloittain mitallinen funktio on mitallinen, ts. $f \in \mathcal{L}$, kun $f := \sum_{k=1}^n f_k\chi_{E_k}$, $E_k \in \mathfrak{M}$, $f_k \in \mathcal{L}(E_k)\ \forall k$ (ja $E_k \cap E_j = \emptyset$ kun $k \neq j$ (oikeastaan tämäkään ei ole tarpeen)). Itse asiassa paloja saa olla numeroituvakin määrä, ks. syksyn 1994 harjoitustehtävät.

[8]**Kommentteja:** f ja g ovat jatkuvia ja siis Borel-mitallisia. Jos μ:n sijaan olisi käytetty μ:n täydellistymää, todistus ja tulokset eivät olisi muuttuneet. (Jos $\nu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ on mitta ja $\nu^* : \mathfrak{M}^* \to [0,\infty]$ on sen täydellistymä, niin triviaalisti $\mathfrak{M}$-mitalliset joukot ja funktiot ovat $\mathfrak{M}^*$-mitallisia. Jos $f \geq 0$ ja $s = \sum_{k=1}^n \alpha_k\chi_{E_k}$ on $\mathfrak{M}^*$-mitallinen porrasfunktio sekä $0 \leq s \leq f$, niin $s' := \sum_{k=1}^n \alpha_k\chi_{A_k} \geq 0$ on $\mathfrak{M}$ mitallinen porrasfunktio ja $0 \leq s' \leq s \leq f$ ja $\int s = \int s'$, kunhan joukot A_k valitaan kuten lauseessa [R2:1.36]. Niinpä (jos $f \geq 0$ on $\mathfrak{M}$-mitallinen) $\int f\,d\nu^* = \int f\,d\nu$ (jos $f \in \mathcal{L}(X,\mathfrak{M};\mathbb{C})$, niin sama seuraa jakamalla f neljään osaansa [R2:1.31]).)

(a) (Huom.: $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{B}$ (suljettujen) yksiöiden numeroituvina yhdisteinä).

(Huom.: koska $\mu(A^c) = 0$, kaikki A^c:n osajoukot ovat mitallisia [R2:1.36], peräti $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$ ($E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \in \mathfrak{M} := \mathcal{B}^*$, missä $\mathcal{B}^*$ tarkoittaa Borel-σ-algebran täydellistymää μ:n suhteen).)

(b)-kohdassa tehty mon. konv. -temppuhan vastaa $[0,\infty]$-funktion epäoleellista Riemann-integraalia; jos integrandi saavuttaa negatiivisiakin arvoja, niin mon. konv. ei aina päde [R2:1.26].) (Huom.: Jos $h \equiv 1$, niin $\mu = m$ (ja $\mathfrak{M}$ on Lebesgue-mitallisten $[0,1]$:n osajoukkojen perhe); jos $h \equiv 0$, niin $\mu \equiv 0$ ja $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$.)[9]

[10]Huom.: Jos $X = \mathbb{R} \wedge \mu = m \wedge f_n(x) := x/n$, niin $f_n(x) \to 0\ \forall x$, mutta arvolla $k = 1$ sama n_1 ei kelpaa kaikille $x \in E$, koska valitsemalla $x > n_1$ on $|f_{n_1}(x) - 0| > 1$, ellei $]n_1,\infty[\subset X \setminus E$, jolloin $m(X \setminus E) = \infty$. Siis $\mu(X) < \infty$ on tarpeen.
Vastaavasti $X =]0,1[\wedge f_n(x) := 1/nx$ osoittaa, ettei aina voida valita $E = X$ (koska tällöin olisi ristiriitaisesti $x < 1/n_1 \implies f_{n_1}(x) > 1$; sen sijaan esim. $E =]\epsilon/2, 1[\subset X$ kelpaisi).

[11]Onhan kukin leikattavista joukoista avoimen joukon $B(0,1/k)$ alkukuva mitallisella funktiolla $f_i - f_j$ ja onhan $\{i,j \in \mathbb{N} \mid i,j > n\} \subset \mathbb{N}^2$ numeroituva.

[12]Missä tahansa metrisessä avaruudessa suppeneva jono on aina Cauchy-jono. Jos käänteinenkin pätee, ko. avaruutta sanotaan täydelliseksi (*complete*). $\mathbb{R}^k$ ja sen suljetut osajoukot ovat täydellisiä [R1] (samoin L^p, $\mathcal{C}_b$ ja $\mathcal{C}_0$ muttei yleensä $\mathcal{C}_c$).

[13]Intuitiivisesti: kunkin $S(n_k,k)$ ulkopuolelle jää alle $2^{-k}\epsilon$-mitallinen määrä pisteitä, joten $\mu(X \setminus E) < \epsilon$ [2^o]. Toisaalta kullekin $\epsilon' := 1/k > 0$ kelpaa n_k, joten suppeneminen

1^o $\{f_n\}$ suppenee tasaisesti E:ssä: $\forall 1/k > 0\ \exists n := n_k$ s.e. $\forall x \in E\ [i,j > n_k \implies |f_i(x) - f_j(x)| < 1/k]$, koska $E \subset S(n_k,k)$, joten $|f_i(x) - f(x)| = \lim_{j\to\infty} |f_i(x) - f_j(x)| \leq 1/k$. Siis $\forall 2/k > 0\ \exists n_k\ \forall x \in E\ [i > n_k \implies |f_i(x) - f(x)| < 2/k]$.[14]
2^o $\mu(E^c) = \mu(\cup_k S(n_k,k)^c) \leq \sum_k \mu(S(n_k,k)^c) < \sum_k 2^{-k}\epsilon = \epsilon$, QED.

on tasaista E:ssä $[1^o]$.

[14]Yleensäkin suppeneva jono suppenee tasaisesti joss se on tasaisesti Cauchy.