Mat-1.150 Reaalianalyysi 3. harj. vastauksineen ma 8.2.1999 (4 sivua)

Välikokeet 1. vk. ma 29.3. klo 12–15 (tuolloin laskuharjoitus pidetään klo 15.15–17 huoneessa U325 tms.), 2. vk. ke 12.5. 13–16. Vaihtoehtona tentti, josta sovitaan myöhemmin.

Kurssin materiaali (kurssiesite, R2-katekismus, osa laskuharjoituksista vastauksineen, vuosien 94 & 97 laskuharjoitukset vastauksineen) on nyt saatavissa Optimin riippareiden (siirtyvät lähiaikoina U316:sta vanhan puolen Optimin huoneeseen) myös URL:sta `http://www.math.hut.fi/~kmikkola/mat/rea/` postscript-muodossa (voit taltioida haluamasi materiaalin sieltä, tulostaa Unixin lpr:llä tai katsella ja tulostaa Unixin ghostview-ohjelmalla (jonka saa imuroitua webistä myös Windowsiin, etsi jollain hakukoneella, tehokkaimmat ovat www.hotbot.com ja www.altavista.com)).

Jos kaipaat harjoitustehtäviä, suosittelen ensisijaisesti R2-katekismuksen (ht)-tehtäviä ja toissijaisesti edellisten vuosien laskuharjoituksia (osin samat kuin nyt).

Tällä kurssilla $\mathbb{N}_+ := \{1,2,3,...\} =: \mathbb{Z}_+$ ja $\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,...\} =: \mathbb{Z}_{+0}$.

Tehtävä 3.1 ([1.35] *keskipitkä, vaikeahko*):
Olkoon[1] $f \in \mathcal{L}^1$ ja olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ([R2]:ssa merkitään yleensä $\{f_n\}$) jono mitallisia funktioita X:llä s.e. $f_n(x) \to f(x)$ m.k. x ja $\int_X |f_n|\,d\mu \to \int_X |f|\,d\mu$, kun $n \to \infty$. Osoita, että $\int_X |f_n - f|\,d\mu \to 0$, kun $n \to \infty$. (Huom.: Tämä pätee L^p:ssäkin ($\int|\cdot| \mapsto \int|\cdot|^p$), kun $0 < p < \infty$, ja on muitakin tapoja todistaa tulos [R2:teht. 3.17].) (Vihje: muunna dom. konv. lauseen todistusta sopivasti.)

Vastaus: Aloitetaan parilla havainnolla: Jos $\lim_n a_n = a$, niin selvästi $\liminf_n(a_n + b_n) = a + \liminf_n b_n$ (**).[2] Koska $\int|f_n| \to \int|f| < \infty$, on oltava $f_n \in \mathcal{L}^1$ ainakin jostain n lähtien, tutkitaan vain näitä n. Olkoon N sellainen nollajoukko, että $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in N^c$. $\forall g \in \mathcal{L}^1$ ($\int_X g = \int_{N^c} g + \int_N g = \int_{N^c} g$). Seuraavassa $\int$ tarkoittaa $\int_{N^c} \quad d\mu$.

$$2\int|f| = \int(|f|+|f|-0) = \int\left(\lim_n|f_n| + |f| - \lim_n|f_n - f|\right)$$

$$= \int \lim_n\left(|f_n| + |f| - |f_n - f|\right) \overset{Fatou}{\le} \liminf_n \int\left(|f_n| + |f| - |f_n - f|\right)$$

$$= \liminf_n\left[\int|f_n| + \int|f| - \int|f_n - f|\right] = \int|f| + \liminf_n\left[\int|f_n| - \int|f_n - f|\right]$$

$$\overset{**}{=} \int|f| + \lim\int|f_n| + \liminf\left[-\int|f_n - f|\right] = 2\int|f| + \liminf\left[-\int|f_n - f|\right],$$

joten $0 \le \liminf I_n$, missä $I_n := -\int_{N^c}|f_n - f| = -\int_X|f_n - f| \le 0$ ja siis $\limsup I_n \le 0$, joten $\liminf I_n = 0 = \limsup I_n$ eli $\exists \lim I_n = 0$ eli $\exists \lim \int_X|f_n - f| = \lim -I_n = -0 = 0$.

Tehtävä 3.2 ([1.4] *keskitasoa*):
Joukon $[0,\infty]$ topologia $\mathcal{T}$ on tapana määritellä seuraavasti: avaruuden $[0,\infty]$ avoimet välit ovat joukot $[0,\infty]$, $[0,b[$, $]a,b[$, $]a,\infty]$, joissa $0 \le a < b \le \infty$, ja avaruuden $[0,\infty]$ avoin joukko on mielivaltainen näiden yhdiste. (Se, määritelläänkö tyhjä joukko $\mathbb{R}^1$:n (tai $[0,\infty]$:n) väliksi tai $\mathbb{R}^k$:n palloksi, vaihtelee kirjasta toiseen. Tässä tehtävässä sillä ei kuitenkaan ole merkitystä, koska tyhjä joukko on kuitenkin avoin, koska se on nollan välin yhdiste.)

(a) Osoita, että $\mathcal{T}$ on topologia.
(b) Millainen on pisteen ∞ ympäristö? Entä pisteen 0 ympäristö?
(c) Miten tämä liittyy seuraaviin peruskurssin käsitteisiin (tässä $0 < a < \infty$): (i) $f(x) \to \infty$, kun $x \to a$; (ii) $f(x) \to a$, kun $x \to \infty$;

---

[1] Merkintöjä: $\mathcal{L}(\mu)$:=mitalliset funktiot. $L(\mu)$:=niiden ekvivalenssiluokat (m.k.-yhtäsuuruusrelaation suhteen) eli $L(\mu) := \{[f] \mid f \in \mathcal{L}(\mu)\}$. $\mathcal{L}^1(\mu) := \{f \in \mathcal{L}(\mu) \mid \int_X |f|\,d\mu < \infty\}$, $L^1(\mu) := \{g \in L(\mu) \mid \int_X |g|\,d\mu < \infty\} = \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^1(\mu)\}$. Muistathan, että $\int_X [f]\,d\mu := \int_X f\,d\mu$ on riippumaton siitä, mikä luokan edustaja valitaan (koska eroavat vain nollamitallisella N ja $\int_X f' = \int_{X\setminus N} f' + \int_N f = \int_{X\setminus N} f' + 0 = \int_{X\setminus N} f + 0 = \int_X f$, kun $f' \sim f$).

[2] Muistathan (tai osannet todistaa), että $\exists \lim_n a_n$ joss $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n$, kun kyse on $[-\infty,\infty]$-arvoisista jonoista (Rudinin lim inf ja lim sup on samat kuin tavalliset (esim. [Rudin1]), vaikka määritelmät ovatkin erinäköiset). Vähällä vaivalla saanet todistettua, että $\lim_n a_n + \liminf_n b_n = \limsup_n a_n + \liminf_n b_n \ge \liminf_n(a_n + b_n) \ge \liminf_n a_n + \liminf_n b_n = \lim_n a_n + \liminf_n b_n$, mistä väite seuraa.

(iii) $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$; (iv) $f(x) \to a$, kun $x \to 0+$.
(d) Miten tulkitset seuraavat lauseet: $f\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ on jatkuva
(i) pisteessä $x = \infty$; (ii) pisteessä $x = 0$.
Huom.: x:n **ympäristö** on avoin joukko, johon x kuuluu. Jos $f : X \to Y$, missä X ja Y ovat topologisia avaruuksia, $b \in X$ ja $c \in Y$, niin

$\lim_{x\to b} f(x) = c$ *joss jokaista c:n ympäristöä V kohti on olemassa b:n ympäristö U s.e.* $x \in U \setminus \{b\} \Rightarrow f(x) \in V$.

(Huom.: (ei liity ratkaisuihin) yo. topologia on $[-\infty,\infty]$:n tavanomaisen topologian indusoima topologia [moniste:1.4] ja $[0,\infty]$ sekä $[-\infty,\infty]$ ovat kompakteja; vastaavasti myös joukkoon $\mathbb{C}$ voidaan liittää piste ∞, tästä tarkemmin [R2]:n loppuosassa.)

Vastaus: (a) Todetaan $\mathcal{T}$:n toteuttavan [R2:1.2]:n ehdot seuraavasti:[3]

(i) $[0,\infty] \in \mathcal{T}$ ja $\emptyset = \cup_{\alpha\in\emptyset} I_\alpha \in \mathcal{T}$ (tyhjä yhdiste).

(iii) Jos $V_\beta \in \mathcal{T}$ $\forall\beta \in \mathcal{B}$ ja $x \in \cup_{\beta\in\mathcal{B}} V_\beta =: V$, niin $x \in V_{\beta_x}$ jollain $\beta_x \in \mathcal{B}$ ja siis on olemassa avoin väli $I_{\alpha_x} \subset V_{\beta_x}$ s.e. $x \in I_{\alpha_x}$ (koska V_{β_x} on muotoa $V = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} I_\alpha$, missä I_α on avoin väli $\forall\alpha \in \mathcal{A}$). Selvästi $V = \cup_{x\in V} I_{\alpha_x} \in \mathcal{T}$.

(ii) [R2:1.2]:n ehdossa (ii) riittäisi vaatia "$V \in \mathcal{T} \wedge V' \in \mathcal{T} \Rightarrow V \cap V' \in \mathcal{T}$", sillä (ii) seuraa tästä induktiolla (htl). Olkoon sitten $V = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} I_\alpha$ ja $V' = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}'} I'_\alpha$, missä jokainen I_α ja I'_α on $[0,\infty]$:n avoin väli.
1° Jos $\infty \in V \cap V'$, niin jollain $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ on I_α muotoa $[0,\infty]$ tai $]a_0,\infty]$. Samoin jokin I'_{α_1} on muotoa $[0,\infty]$ tai $]a_1,\infty]$, joten jollain a_2 ($a_2 := \max(a_0,a_1)$ tms.) on $]a_2,\infty] \subset V \cap V'$. Merkitään tällöin $J_\infty :=]a_2,\infty]$.
2° Jos $0 \in V \cap V'$, niin vast. $J_0 := [0,b_2[\subset V \cap V'$, jollain $b_2 > 0$.
3° Jos $x \in V \cap V' \setminus \{0,\infty\}$, niin joillain $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ ja $\alpha_1 \in \mathcal{A}'$ on $x \in I_{\alpha_0}$ ja $x \in I'_{\alpha_1}$, niinpä $x \in]a,b[=: J_x \subset V \cap V'$ joillain a, b ($a < b$).
4° Nyt jokaiselle $x \in V \cap V'$ on määritelty jokin $[0,\infty]$:n avoin väli $J_x \subset V \cap V'$ s.e. $x \in J_x$. Niinpä $V \cap V' = \cup_{x\in V\cap V'} J_x \in \mathcal{T}$.

(b) Pisteen ∞ ympäristö on avoin joukko V, johon ∞ kuuluu, ts. jokin $[0,\infty]$:n avointen välien I_α yhdiste, jossa $\infty \in I_\alpha$ jollain α eli jossa I_α on muotoa $[0,\infty]$ tai $]a,\infty]$ jollain α (ja jollain $a \in [0,\infty[$); siis joka tapauksessa V sisältää jonkin muotoa $]a,\infty]$ olevan joukon ($a \in \mathbb{R}_+$); toisaalta jokainen muotoa $]a,\infty]$ oleva joukko on ∞:n ympäristö. Ergo: äärettömän ympäristö on avoin V, jolla $]a,\infty] \subset V$ jollain $a \in \mathbb{R}_+$. Vastaavasti nollan ympäristö sisältää aina jonkin muotoa $[0,b[$ olevan joukon ($b > 0$); toisaalta jokainen muotoa $[0,b[$ oleva joukko on 0:n ympäristö.

(c) (i) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ voidaan ilmaista seuraavin ekvivalentein tavoin:
"Jokaista ∞:n ympäristöä V kohti on oltava olemassa jokin a:n ympäristö W s.e. $x \in W \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V$." (*) eli
Jokaista $]c,\infty]$ ($c < \infty$) kohti on olemassa jokin $]d,e[\ni a$ s.e. $x \in]d,e[\setminus\{a\} \Rightarrow f(x) \in]c,\infty[$. (**) eli
Jokaista $c < \infty$ kohti on olemassa $\delta > 0$ s.e. $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\} \Rightarrow f(x) > c$. (***)
$\forall c < \infty\ \exists\delta > 0\ (x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > c)$. (****)
(*)⇒(**) nähdään valitsemalla $V :=]c,\infty] \in \mathcal{T}$, koska tällöin $a \in]d,e[$ jollain avoimella välillä $]d,e[\subset W$.
(**)⇒(*) nähdään valitsemalla $c < \infty$ s.e. $]c,\infty] \subset V$ ja merkitsemällä $W :=]d,e[$.
(**)⇒(***) nähdään valitsemalla $\delta := \min(|d-a|, |e-a|) > 0$.
(***)⇒(**) nähdään merkitsemällä $d := a - \delta$, $e := a + \delta$.
(***) $\iff$ (****) Sama asia eri tavoin kirjoitettuna.
Kohdissa (ii)–(iv) nähdään vastaavasti seuraavaa:
(ii) $\forall\epsilon > 0\ \exists c < \infty\ (\infty > x > c \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(a))$.
(iii) $\forall M < \infty\ \exists c < \infty\ (\infty > x > c \Rightarrow f(x) > M)$.
(iv) $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (0 < x < \delta \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(a))$.

(d) "$f : X \to Y$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in X$" tarkoittaa, että "jos V on $f(x_0)$:n ympäristö, niin on olemassa x_0:n ympäristö W s.e. $fW \subset V$ (ts. $x \in W \Rightarrow f(x) \in V$)" [R2:1.4] (huom.: ei "$x \in W \setminus \{x_0\} \Rightarrow$ ...") (eli "lähellä x_0:aa olevat pisteet kuvautuvat lähelle $f(x_0)$:aa") eli "$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$". Niinpä $f : [0,\infty] \to [0,\infty]$ on jatkuva pisteessä ∞ joss jokaista $f(\infty)$:n ympäristöä V kohti on olemassa $c < \infty$ s.e. $f(]c,\infty]) \subset V$. f on jatkuva pisteessä 0 joss jokaista $f(0)$:n ympäristöä V kohti on olemassa $\delta > 0$ s.e. $f([0,\delta[) \subset V$.

(Kuriositeetti: $[0,\infty]$:n kompaktisuus todistetaan seuraavasti: Jos $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ on

[3] Voitaisiin myös todistaa, että jos $V \in \mathcal{T}$, niin V on muotoa $V = \cup_{x\in V} I_x$, missä I_x on $[0,\infty]$:n avoin väli $\forall x$, minkä jälkeen (ii) ja (iii) saataisiin vähän nopeammin. Em. väite seuraa siitä, että $V = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} J_\alpha$, ja jos $x \in V$, niin $x \in J_\alpha$ jollain α ja voidaan merkitä $I_x := J_\alpha$ (valitaan jokin α, jolla $x \in J_\alpha$) ja helposti nähdä että $V = \cup_{x\in V} I_x$

$[0,\infty]$:n avoin peite, niin jollain α_0 on $\infty \in V_{\alpha_0}$, ts. $]a,\infty] \subset V_{\alpha_0}$ jollain $a < \infty$. Merkitään $V'_\alpha := V_\alpha \cap [0,\infty[= V_\alpha \setminus \{\infty\}$ $\forall\alpha$. Tällöin $V'_\alpha \in \mathcal{T}_{[0,\infty[}$ $\forall\alpha$ ja siis kompaktina joukkona $[0,a] \subset V'_{\alpha_1} \cup ... \cup V'_{\alpha_n}$ joillain $\alpha_1,...,\alpha_n$. Siis $[0,\infty] = [0,a]\cup]a,\infty] \subset V_{\alpha_0} \cup V_{\alpha_1} \cup ... \cup V_{\alpha_n}$.)

Tehtävä 3.3 ([1.34] *keskipitkä, vaikeahko*):
Olkoon μ X:n positiivinen mitta, $f : X \to [0,1]$ mitallinen s.e. $\int_X f\,d\mu = c$, $0 < c < \infty$ ja $\alpha > 0$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n\log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{kun } 0 < \alpha < 1; \\ c, & \text{kun } \alpha = 1; \\ 0, & \text{kun } \alpha > 1. \end{cases}$$

(Huom.: tässä, kuten yleensä mm. englanninkielisessä kirjallisuudessa log tarkoittaa samaa kuin ln, ellei toisin anneta ymmärtää.) (Vihje: $\alpha \geq 1$: integrandi$\leq f \in \mathcal{L}^1$; $\alpha < 1$: Fatoun lemma!)

Vastaus: Olkoon $g_n := n\log\left(1 + (\frac{f}{n})^\alpha\right) = \log\left(\left(1 + (\frac{f}{n})^\alpha\right)^n\right)$.

Lemma $h_n(x) := (1 + \frac{x}{n})^n \overset{n\to\infty}{\to} e^x$ *monotonisesti kasvaen* $\forall x \geq 0$.[4]

1° $\alpha = 1$: $g_n = \log\left((1 + \frac{f}{n})^n\right) \leq \log e^f = f \in \mathcal{L}^1$ [Lemma] ja $g_n(x) \to f(x)$ $\forall x$, joten $\int_X g_n \to \int_X f = c$ (dom. konv. ja mon. konv. kumpikin kertovat tämän).

2° $\alpha > 1$: $0 \leq (\frac{f}{n})^\alpha \leq \frac{f}{n}$ (koska $|f| \leq 1$), joten $0 \leq g_n \leq n\log(1 + f/n)) \leq \log e^f = f \in L^1(\mu)$. Lisäksi [Lemma] $g_n = \log\left((1 + \frac{1}{n}\frac{f^\alpha}{n^{\alpha-1}})^n\right) \leq \log(\exp(\frac{f^\alpha}{n^{\alpha-1}})) \overset{n\to\infty}{\to} \log\exp 0 = 0$. Niinpä (dom. konv. $(g_n \leq f \in L^1)$) $\lim_n \int g_n = \int 0 = 0$.

3° $0 < \alpha < 1$: Koska $\int f > 0$, niin $0 < \mu(A)$, missä $A := \{x \,|\, f(x) > 0\}$. Jos $x \in A$, $g_n(x) = \log\left((1 + (\frac{f(x)}{n})^\alpha)^n\right) = \log\left([1 + \frac{1}{n}(f(x)^\alpha n^{1-\alpha})]^n\right) \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, sillä $\forall M \in \mathbb{R}_+$ $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.e. $\forall n > N_2$ pätee $g_n(x) > M$ (eli $\left([1 + \frac{1}{n}(f(x)^\alpha n^{1-\alpha})]^n\right) > e^M$), kuten seuraavasta nähdään:
Valitaan $N \in \mathbb{N}$ on s.e. $M' := f(x)^\alpha N^{1-\alpha} > M$. Tällöin $(1 + \frac{1}{n}(f(x)^\alpha n^{1-\alpha}))^n > (1 + \frac{1}{n}M')^n > e^M$, kun $n > N$ on riittävän suuri (koska $(1 + \frac{1}{n}M')^n \to e^{M'} > e^M$) (ts. valitaan N' s.e. $(1 + \frac{1}{n}M')^n > e^M$ ja $N_2 := \max(N, N')$). Niinpä

$$\infty = \int_A \infty = \int_A \liminf g_n \overset{Fatou}{\leq} \liminf \int_A g_n \leq \liminf \int_X g_n, \text{ joten } \lim_n \int_X g_n = \infty.$$

Tehtävä 3.4 ([Luku 2] *helpohko, lyhyehkö*):
[R2:Exe2.1] Olkoon $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (i) Osoita, että seuraavista väittämistä kolme on tosia ja yksi epätosi:
(a) Jos f_1 ja f_2 ovat ylhäältä puolijatkuvia, niin on myös $f_1 + f_2$.
(b) Jos f_1 ja f_2 ovat alhaalta puolijatkuvia, niin on myös $f_1 + f_2$.
(c) Jos jokainen f_n on ylhäältä puolijatkuva, niin on myös $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.
(d) Jos jokainen f_n on alhaalta puolijatkuva, niin on myös $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.
(ii) Mitä tapahtuu, jos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? (iii) Entä funktioilla $f_n : X \to [0,\infty[$ tai (iv) $f_n : X \to \mathbb{R}$?

Vastaus: Alla $f_n, f : X \to]-\infty,\infty[$ paitsi toisin mainittaessa.
(Huom.: vastaukset olisivat samoja, vaikka $[0,\infty[$ korvattaisiin $[0,\infty]$:llä ($]-\infty,\infty[$-funktioiden yhteenlasku ei sen sijaan ole aina määritelty (lähinnä $\infty-\infty$)). Tämän todistaminen vaatisi vain pieniä merkinnällisiä muutoksia ao. päätelmiin.)

(a) on aina tosi (i–iv): Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ annettu, $V := \{x \,|\, f_1(x) + f_2(x) < \alpha\}$. Jos $a \in V$, niin $\alpha_a := (f_1 + f_2)(a) := f_1(a) + f_2(a) < \alpha$. Olkoon $\epsilon := (\alpha - \alpha_a)/2$. $(f_1 + f_2)(x) < \alpha$, kun $x \in V_a := \{x \,|\, f_1(x) < f_1(a) + \epsilon\} \cap \{x \,|\, f_2(x) < f_2(a) + \epsilon\} \subset\!\!\circ\, V$, joten V on avoin ($V = \cup_{a\in V} V_a$).

(b) on aina tosi (i–iv), mikä nähdään kuten (a)-kohdassa. (Tapa 2: $-f_1, -f_2$ y. pj., joten $-(f_1 + f_2) = (-f_1) + (f_2)$ y. pj.)

(c) epätosi jopa tapauksessa (i): $f_n := \chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$ [2.8b], jolloin[5] $\{x \,|\, \sum_n f_n < 1\} =]0,1]^c \notin \mathcal{T}$.

(d) (i)&(iii) $X \to [0,\infty[$ tosi: $g_N := \sum_{n=1}^N f_n$ on alhaalta puolijatkuva $\forall N$ (b)-kohdan ja induktion perusteella. $\sum_{n=1}^\infty f_n := \lim_{N\to\infty} g_N \overset{*}{=} \sup_N g_N$ on

[4] Tod.: Tunnetusti $h_n(x) \to e^x$. Selvästi $h_1(x) = 1+x \leq 1+x+x^2/4 = h_2(x) \leq 1+x+x^2/3+x^3 = h_3(x)$. Tämä pätee $\forall n$: $h_n(x) = (1+x/n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x/n)^k 1^{n-k}$, joten $h_{n+1}(x) \geq h_n(x)$, koska näiden koonnensien termien suhde on $n^k/[(n+1-k)(n+1)^{k-1}] \geq 1$, koska $f(y_1, y_2, ..., y_k)$ rajoitusehdoilla $0 \leq y_j$ $\forall j$ ja $\sum_j y_j = kn$ saavuttaa maksiminsa pisteessä $y_j = n$ $\forall j$ (nähdään gradientin nollakohdan avulla; tämä tarkoittaa, että geometrinen keskiarvo on enintään aritmeettisen suuruinen).

[5] Tällöin $\sum_n f_n = \chi_{]0,1]} + \chi_{\{1/n \,|\, n\in\mathbb{N}_+\}}$, minkä tietäminen ei ole tarpeen.

alhaalta puolijatkuva [R2:2.8c], kun $f_n \geq 0\ \forall n$ ($*$ seuraa siitä, että tällöin $g_N \leq g_{N+1}\ \forall N$). Tapauksessa (ii)&(iv) väite (d) on epätosi, vastaesim.: $f_n := -\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$ (tämä on (c)-kohdan vastaesimerkin negaatio).
(Huom.: kun $\infty > \beta > 0$, niin f on y.pj. joss βf on y.pj. joss $-\beta f$ on a.pj. (koska $\{x \mid -\beta f(x) > \alpha\} = \{x \mid f(x) < -\alpha/\beta\}$).)

Tehtävä 3.5 ([1.4] *vaikea, keskipitkä*):
Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Osajoukko $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ on $\mathcal{T}$:n *kanta* joss jokainen $\mathcal{T}$:n alkio on $\mathcal{B}$:n alkioiden yhdiste, ts. jokainen avoin joukko on esitettävissä muodossa $\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha$, missä $B_\alpha \in \mathcal{B}\ \forall \alpha$.[6]

Olkoon $\mathcal{C} := \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R}_+) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}_+ \mid f$ on jatkuva$\}$ varustettu metriikalla $d(f,g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.[7] Yritä löytää tämän metrisen avaruuden jokin numeroituva kanta.

Vastaus: Huom.: vain osassa topologisia avaruuksia (esim. $\mathbb{R}^k$:ssa $\{B_r(x) \mid x \in \mathbb{Q}^k,\ r \in \mathbb{Q}_+\} \preceq \mathbb{Q}^{k+1} \approx \mathbb{N}$), on numeroituva kanta.[8]

Lemma 0.0.1 *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $S \subset X$ tiheä ja numeroituva.*[9] *Tällöin $\mathcal{B} := \{B_r(s) \mid s \in S,\ r \in \mathbb{Q}_+\}$ on numeroituva X:n kanta.*

[6] Siis $\mathcal{T}$ itse on aina kanta. Metrisessä avaruudessa aina avointen pallojen joukko on kanta (koska metrisen avaruuden avoimet joukot (eli topologia) määritellään juuri siten [1.4]), samoin avointen alle 1-säteisten pallojen joukko tai avointen alle 0,0001-säteisten pallojen joukko, tai $\mathbb{R}^k$:ssä avointen $\mathbb{Q}^k$-keskisten rationaalisäteisten pallojen joukko (esimerkki numeroituvasta kannasta) tai avointen k-kuutioiden joukko.

[7] $\mathcal{C}(A, X)$ on tapana varustaa sup- eli max-metriikalla, kun A on kompakti ja X on metrinen avaruus (kun X on normiavaruus, kuten nyt, tämä metriikka on normin $\max_{a \in A} \|f(a)\|$ määräämä). Jos A ei olisi kompakti, yleensä käytettäisiin seminormeja $\max_{a \in K} \|f(a)\|$ kullakin kompaktilla $K \subset A$ ja näin saataisiin seminormitopologia (yleensä Fréchet-avaruus), mutta jos joskus tarvitset tällaista ks. [R3].

[8] Näitä sanotaan N_2-avaruuksiksi. Metristyvä avaruus on N_2 joss se on Lindelöf-avaruus joss se on separoituva joss ei ole olemassa $A \subset X$ ja $\epsilon > 0$ s.e. $A \succ \mathbb{N}$ mutta $a, a' \in A \wedge a \neq a' \implies d(a, a') > \epsilon$ [Jussi Väisälä: Topologia II]. Suorita/lue yliopiston Topologia II, jos nämä kiinnostavat. Esim. diskreetissä $\mathbb{R}$:ssä ($\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{R}) =: 2^{\mathbb{R}}$) välttämättä $\{r\} \subset \mathcal{B}\ \forall r \in \mathbb{R}$ (todista!), joten $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ ei ole N_2. Useimmat tutut Hilbert- ja Banach-avaruudet ovat separoituvia (esim. $L^p(\mathbb{R})$ kun $1 \leq p < \infty$ muttei $L^\infty(\mathbb{R})$); lisätiedot: [TID].

[9] Ts. oletetaan X separoituvaksi eli että siinä on tiheä, numeroituva osajoukko.

Todistus: Olkoon $V \in \mathcal{T}$. Määritellään $W = \cup_{\mathcal{B} \ni B \subset V} B$. Todistamme, että $W = V$. Triviaalisti $W \subset V$, joten oletamme $x \in V$ ja todistamme, että $x \in W$: Valitaan ensin $\delta > 0$ s.e. $B_\delta(x) \subset V$. Valitaan sitten[10] $s \in S \cap B_{\delta/3}(x)$ (piirrä kuva!). Valitaan $r \in \mathbb{Q}_+ \cap]\delta/3, \delta/2[$, jolloin[11] $B_r(s) \subset B_\delta(x) \subset V$. Nyt[12] $x \in B_r(s) \subset W$ (koska $\mathcal{B} \ni B_r(s) \subset V$). Koska $x \in V$ oli mielivaltainen, $V \subset W$, QED. $\mathcal{B} \preceq S \times \mathbb{Q}_+ \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, joten $\mathcal{B}$ on numeroituva.[13] $\square$

Siis on vain löydettävä tiheä, numeroituva $S \subset \mathcal{C}$. Stone–Weierstrassin lauseen [R1:7.26] perusteella reaalisten polynomien joukko P on tiheä $\mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$:ssä. Erityisesti jokaiselle $f \in \mathcal{C}$ on olemassa $\{p_n\} \subset P$ s.e. $d(p_n, f) \to 0$. Olkoon $Q \subset P$ rationaalikertoimisten polynomien ($\sum_{j=0}^n q_j t^j$, missä $n \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{Q}\ \forall j$) perhe (sehän on numeroituva, $Q \approx \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^{n+1} \approx \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{n+1} \approx \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$).

Valitaan $\{p_n\} \subset P$ s.e. $d(p_n, f) < 1/n$ ja muutetaan kunkin $p_n(t) = \sum_{j=0}^{N_n} a_{n,j} t^j$ kertoimia alle luvun $\epsilon_n := 1/n(N_n+1)$ verran $\mathbb{Q}$:hun, ts. valitaan $\{q_{n,j}\} \subset \mathbb{Q}$ s.e. $|q_{n,j} - a_{n,j}| < \epsilon_n$ ja olkoon q_n näin saatu polynomi. Tällöin $|q_n(t) - p_n(t)| = |\sum_{j=0}^{N_n} (q_{n,j} - a_{n,j}) t^j| \leq \sum_{j=0}^{N_n} |q_{n,j} - a_{n,j}| |t|^j \leq \sum_{j=0}^{N_n} \epsilon_n 1^j < 1/n\ \forall t \in [0,1]$, joten $d(q_n, f) < 2/n \to 0$.

Olisimme siis jo ratkaisseet tehtävän, ellei Stigu olisi kirjoittanut funktioita $\mathbb{R}_+$-arvoisiksi, ts. voi olla $q_n \notin \mathcal{C}$. Ei se mitään, koska jatkuvalla funktiolla f on minimi $r_f := \min_{t \in [0,1]} |f|$ kompaktissa joukossa $[0,1]$, ja f on $\mathbb{R}_+$-arvoinen, on $r_f > 0$. Valitaan $N > 2/r_f$. Tällöin $q_n(t) > r_f - 2/N > 0\ \forall t \in [0,1]\ \forall n \geq N$, joten $q_n \in \mathcal{C}\ \forall n \geq N$, ts. $q_n \in Q' := Q \cap \mathcal{C}\ \forall n \geq N$. Heitetään jonon alkupää pois — $Q' \preceq Q \approx \mathbb{N}$ on siis tiheä $\mathcal{C}$:ssä (koska $f \in \mathcal{C}$ oli mielivaltainen). Nyt lemma antaa numeroituvan $\mathcal{C}$:n kannan.

[10] "S on tiheä X:ssä" tarkoittaa, että jokainen avoin joukko sisältää S:n alkion eli $G \cap S \neq \emptyset\ \forall G \in \mathcal{T}$ eli S:n sulkeuma on X. Metrisissä avaruuksissa tämä on ekvivalenttia vahvemman jonotiheyden kanssa, ts. $\forall x \in X\ \exists \{s_n\} \subset S$ s.e. $s_n \to x$ (samoin jatkuvuus yleensä heikomman jonojatkuvuuden kanssa).

[11] Koska $y \in B_r(s) \implies d(y,s) < r \implies d(y,x) \leq d(y,s) + d(y,x) < r + \delta/3 < \delta \implies y \in B_\delta(x)$.

[12] $d(x,s) \leq \delta/3 < r$, joten $x \in B_r(s)$.

[13] Mahtavuuksista tarkemmin: keksi itse sopivat injektiot tai ks. R2-katekismuksen alku tai [R1:2.1–2.13]. Nyt esim. numeroidaan (vaikkapa aakkosjärjestyksessä) ensin ne $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, joilla $n + m = 0$, sitten ne, joilla $n + m = 1$, jne.