Mat-1.150 Reaalianalyysi harjoitus 2 vastauksineen ma 1.2.1999 (3 sivua) Huom.: tehtävä 1.4 olikin vuoden 1994 tehtävä 4.2, jonka olin ratkaissut hieman lyhyemmälläkin tavalla (diagonaaliargumentti), optimin riipparissa.

Tehtävä 2.1 ([1.6] *helpohko,lyhyehkö*):
Olkoon X joukko ja olkoon $S \subset \mathcal{P}(X)$ kokoelma X:n osajoukkoja. Olkoon $M \subset X$. Määritellään

$$S_M := \{E \cap M \mid E \in S\}.$$

(a) Oletetaan, että S on joukon X topologia. Onko S_M joukon M topologia?

(b) Oletetaan, että S on joukon X σ-algebra. Onko S_M joukon M σ-algebra?

Vastaus: (a) Kyllä. S_M on *aliavaruuden M avaruudelta X perimä topologia*[1].

Siis (X, S) täyttää ehdot [1.2], todistamme että myös (M, S_M) täyttää:
(i) $\emptyset = \emptyset \cap M \subset S_M$, $M = X \cap M \subset S_M$.
(ii) Jos $V_1, ..., V_n \in S_M$, niin ne ovat muotoa $V_k = W_k \cap M$ joillain $W_k \in S$ $\forall k = 1, ..., n$, joten

$$V_1 \cap \ldots \cap V_n = (W_1 \cap M) \cap \ldots \cap (W_n \cap M) = W_1 \cap \ldots \cap W_n \cap M \in S_M,$$

koska $W_1 \cap \ldots \cap W_n \in S$.
(iii) Jos $V_\alpha = W_\alpha \cap M$ ja $W_\alpha \in S$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, niin

$$\cup_\alpha V_\alpha = \cup_\alpha (W_\alpha \cap M) \stackrel{*}{=} M \cap (\cup_\alpha W_\alpha) \in S_M, \text{ QED.}$$

$*$: Muistathan, että joukot saa helpoiten todistettua samoiksi toteamalla, että oikean puolen alkiot kuuluvat vasemmallekin ja päinvastoin.

(b) Kyllä.[2] (i) $M = X \cap M \in S_M$, OK.

[1] Jos X on topologinen avaruus ja $M \subset X$ (kuten nyt), niin juuri näin on tapana määritellä topologia (ali)avaruuteen M (älä sekoita (topologista) aliavaruutta vektoria-liavaruuteen). Esim. $\mathbb{R}^7$ vs. $\mathbb{R}^3$ vs. $\mathbb{R}^1$ vs. R_+ vs. $[0, 1]$ (tulos on aina sama riippumatta siitä, mennäänkö suoraan vain askel askeleela. Myös useat muut vastaavat tulokset (mm. jatkuvuus) yleistyvät kauniisti, tarkemmin: topologian oppikirjat.

[2] Tämä on standarditapa. Esim. $\mathbb{R}^1$:n Lebesguen mittaa (esitellään luvussa 2, näit sen jo ModA:n lopussa [R1]) voi käyttää myös tutkittaessa pelkästään $[0, 1]$:n osia tms.; myös vastaavat funktioita ja mittoja koskevat tulokset yleistyvät kauniisti.

(ii) Jos $A \in S_M$, niin $A = B \cap M$ jollain $B \in S$, joten[3] $A^{c_M} := M \setminus A = M \setminus B = M \cap B^{c_X} \in S_M$, OK.[4]
(iii) suunnilleen kuten (a)(iii).

Tehtävä 2.2 ([1.28] *helppo, nopeahko, tärkeä*):

$$\text{Olkoon } f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{kun } 0 \le x < \frac{1}{n}; \\ n^2(\frac{2}{n} - x), & \text{kun } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{kun } x > \frac{2}{n}; \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Laske a) $\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\,dx$, b) $\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx$ (vrt. Fatou), c) $\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\,dx$ ja d) $\int_0^1 \limsup_{n\to\infty} f_n\,dx$. (Huom.: kuten aiemmin on todettu, Lebesgue-integraali Lebesgue-mitan suhteen (jota yleensä tarkoitetaan, kun mittaa ei kerrota kuten yllä) on sama kun Riemann-integraali, mikäli jälkimmäinen on olemassa.)

Vastaus: Kyseessä on kolmiopiikki, jonka ala on 1, korkeus n ja leveys $2/n$. Piikki siis tiivistyy kohti origoa rajatta (ja suppenee deltadistribuutioon (distribuutioiden avaruudessa $\mathcal{D}'$ (tai missä tahansa $(\mathcal{C}^k)^*$), ts. $f_n\phi \to \phi(0)$ kaikilla $\phi \in \mathcal{D} := \mathcal{C}_c^\infty$ (vast. $\forall \phi \in \mathcal{C}^k$); ei kuulu tähän kurssiin).

Varsinainen ratkaisu: Selvästi $\int_0^1 f_n = 1$ (kolmion ala (piirrä!)) ja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in [0, 1]$ ($x > 0 \Rightarrow f_n(x) = 0$ $\forall n > \frac{2}{x}$). Siis $\liminf_n \int_0^1 f_n = \limsup_n \int_0^1 f_n = \lim_n \int_0^1 f_n = \lim_n 1 = 1$ ($[-\infty, \infty]$-arvoisilla jonoilla $\liminf$ ja $\limsup$ ovat aina olemassa ja selvästi aina $\exists \lim \iff \liminf = \limsup$) ja $\int_0^1 \liminf_n f_n = \int_0^1 \limsup_n f_n = \int_0^1 \lim_n f_n = \int_0^1 0 = 0$.

Johtopäätös: $\int_0^1 \liminf_n f_n(x)\,dx = 0 < 1 = \liminf_n \int_0^1 f_n(x)\,dx$ eli Fatoun lemman epäyhtälö voi olla aito. Intuitiivinen syy on se, että oikealla ensin integroidaan koko tietty f_n saaden 1 ja niistä ykkösistä liminf on 1, kun taas vasemmalla etsitään kullekin x oma liminf-huonoin mahdollinen $n = n_x$, jolloin päästään pienempään kuin millään yksittäisellä n (joka olisi sama kaikille x).

Tehtävä 2.3 ([1.12] *lyhyt mutta abstrakti*):

[3] Huomaa ehto [1.3(ii)]: jos $A \in S_M$, niin M-komplementin $A^{c_M} := M \setminus A$ on oltava $\in S_M$, jotta S_M olisi nimenomaan M:n σ-algebra.

[4] Onhan selvästi $M \setminus B \subset M \setminus A$, toisaalta $x \in M \setminus A \implies x \in M \wedge x \notin M \cap B \implies x \in M \setminus B$.

Olkoon $f_n : X \to \mathbb{R}$ mitallinen $\forall n \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$S := \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ on olemassa ja äärellinen } \}$$

on mitallinen joukko ($S \in \mathfrak{M}$).[5]

Vastaus: $S(n,k) := \cap_{i,j>n}\{x \in X \mid |f_i(x) - f_j(x)| < 1/k\} \in \mathfrak{M}$.[6] Jokaisella $x \in X$ pätee $x \in S \iff \{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono [R1] $\iff$ $\forall k \in \mathbb{N}_+ \exists n \in \mathbb{N} \forall i,j > n\ [|f_i(x) - f_j(x)| < 1/k] \iff \forall k \in \mathbb{N}_+ \exists n \in \mathbb{N}\ [x \in S(n,k)] \iff \forall k \in \mathbb{N}_+\ [x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} S(n,k)] \iff x \in \cap_{k\in\mathbb{N}_+} \cup_{n\in\mathbb{N}} S(n,k)$ joten $S = \cap_{k\in\mathbb{N}_+} \cup_{n\in\mathbb{N}} S(n,k)$, siis $S \in \mathfrak{M}$ (koska numeroituva yhdisteet ja leikkaukset mitallisista joukoista ovat mitallisia), QED.

Tehtävä 2.4 ([1.26] *lyhyehkö*):
Lebesguen monotonisen suppenemisen lauseessa [1.26] $f_1 \le f_2 \le \ldots$. Miten lause olisi muotoiltava, jos f on ei-kasvava n:n funktiona eli[7]

$$f_n(x) \ge f_{n+1}(x) \quad \forall x \in X\ \forall n$$
$$f_n(x) \ge 0 \quad \forall x \in X\ \forall n?$$

Vastaus: Vastaesim.: $X = \mathbb{R}_+$, $f_n(x) := 1/nx$, $\mu := m$, jolloin $f(x) := \lim_n f_n(x) = 0\ \forall x$, mutta $\int f_n = \infty \ne 0 = \int f$.

Jos kuitenkin $f_1 \in L^1(\mu)$, ts. $\int_X f_1\, d\mu < \infty$, niin sitten $\int \lim_n = \lim_n \int$ kuten kasvavan jonon tilanteessa:

Olkoon $\infty \ge f_1 \ge f_2 \ge \ldots \ge 0$, olkoon kukin f_n mitallinen, $\int_X f_1 < \infty$ ja $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in X$. Tällöin f on mitallinen ja $\int_X f_n \overset{n\to\infty}{\to} \int_X f$.[8]

Tämän voisi todistaa kuten [1.26]:n, mutta laiskana johdan sen siitä (hyödyntäen [1.32]:a). Merkitään näet $g_n := f_1 - f_n \ge 0$. Tällöin $0 \le g_1 \le g_2 \le \ldots \le \infty$ ja $g_n(x) = f_1(x) - f_n(x) \to f_1(x) - f(x) =: g(x)$, joten (a) $f = f_1 - g$ on mitallinen (b) lauseen [1.32] perusteella $\int_X f_n = \int_X (f_1 - g_n) \overset{[1.32]}{=} \int_X f_1 - \int_X g_n(x) \to \int_X f_1 - \int_X g(x) = \int_X f_1 - \int_X [f_1 - f] \overset{[1.32]}{=} \int_X f_1 - [\int_X f_1 - \int_X f] = \int_X f$. (Huom.: kaikki em. funktiot ovat selvästikin $\le f_1$ ja siksi $\in L^1$; muutoinhan yllä olisi saattanut lukea $\infty - \infty$ virheellisen [1.32]:n sovelluksen seurauksena.)

Tehtävä 2.5 ([1.29] *lyhyehkö*):
Lauseen [1.29] todistuksen viimeiset sanat ovat "the general case follows from the monotone convergence theorem". Selvitä tarkasti, mitä tässä tehdään.

Vastaus: On hyvin tavallista todistaa jokin lause ensin karakteristisille funktioille, sitten laajentaa lineaarisuuden avulla yksinkertaisille funktioille ja lopulta laajentaa niistä (a) kaikille positiivisille parin [1.17] & [1.26] avulla (monotoninen konvergenssi yksinkertaisilla funktioilla) tai[9] (b) kaikille L^1-funktioille tiheyden [3.13] ja jatkuvuuden (jos väitetty asia koskee jatkuvia L^1:ssä määriteltyjä operaatioita) perusteella. Nyt on kyse (a)-kohdasta.

Kirjassa on todistettu, että $\phi(E) := \int_E f\, d\mu$ määrää $\mathfrak{M}$:llä uuden mitan $\phi : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$. Lisäksi on todistettu, että $\int_X g\, d\phi = \int_X gf\, d\mu$, kun $g = \chi_E$, $E \in \mathfrak{M}$ ja em. yhtälön molempien puolien lineaarisuuden perusteella yleistetty tämä yksinkertaisiin mitallisiin funktioihin $g = \sum_{j=1}^n \alpha_k \chi_{E_k}$.

Varsinainen vastaus: Jos nyt $g : X \to [0,\infty]$ on mitallinen,[10] lauseesta [1.17] saadaan ei-negatiivisten yksinkertaisten mitallisten funktioiden kasvava jono $\{s_n\}$ s.e. $s_n(x) \to g(x)\ \forall x$. Tietysti fs_n on myös kasvava jono (koska $f \ge 0$), joten monotonisen konvergenssin lauseen [1.26] perusteella voidaan nyt tulos yleistää yksinkertaisista funktioista (s_k) tähän mielivaltaiseen g:

$$\int_X g\, d\phi = \int_X \lim_n s_n\, d\phi \overset{[1.26]}{=} \lim_n \int_X s_n\, d\phi = \lim_n \int_X s_n f\, d\mu$$
$$\overset{[1.26]}{=} \int_X \lim_n s_n f\, d\mu = \int_X f \lim_n s_n\, d\mu = \int_X fg\, d\mu, \text{ QED.}$$

[5]Vihje: $S(n,k) := \cap_{i,j>n}\{x \in X \mid |f_i(x) - f_j(x)| < 1/k\} \in \mathfrak{M}$. Jos tämäkään ei riitä, lue vastauksen alkua.

[6]Onhan kukin leikattavista joukoista avoimen joukon $B(0,1/k) =]-1/k, 1/k[$ alkukuva mitallisella funktiolla $f_i - f_j$ (siksi mitallinen) ja onhan $\{i,j \in \mathbb{N} \mid i,j > n\} \subset \mathbb{N}^2$ numeroituva [R1].

[7]$f \ge g$ tarkoittaa että $f(x) \ge g(x)\ \forall x$.

[8]Huom.: monotonisuus on välttämätöntä, tehtävä 2.2. (jossa $\{f_n\}$ ei ole monotoninen) osoittaa, että $\lim \int \ne \int \lim$ on yleensä mahdollista (vaikka molemmat olisivat olemassa). Monotonisen [1.26] ja dominoidun [1.34] suppenemisen lauseet siis ovat (erittäin tärkeitä) poikkeustapauksia (jos jono ei ole monotoninen [1.26], sinun on siis koetettava löytää sille yhteinen L^1-majorantti g [1.34]).

[9]Jaottelun [1.31] avulla (a)-kohdankin voi usein jatkaa kompleksiarvoisiin, ainakin L^1:een.

[10]Tulos yleistyisi kompleksiarvoisiin $g \in L^1(\phi)$.