Mat-1.150 Reaalianalyysi: 12. harj. vastauksineen ma 19.4.1999 (4 sivua) Nämä ovat viimeiset laskuharjoitukset. Toinen välikoe on ke 12.5. klo 13–16 kuten alunperin sovittiin, katso salit tuolloisesta tenttien salijärjestyslistasta.

Tenttialue: Luvut 5, 6, 7 ja 8 **paitsi**:
5.6 (pelkkä lause osattava, ei tod.)
5.12, 5.13
6.11 (pelkkä lause osattava, ei tod.)
6.14
7.12
7.15 (pelkkä lause osattava, ei tod.)
7.21–7.26
Kohdista 8.1–8.12 pelkät käsitteet ja lauseet, ei todistuksia.
8.17
8.18.

Tehtävä 12.1 ([7.12] *keskitasoa, lyhyt*):
Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \wedge r \in \mathbb{R}_+$. Todista, että $x \mapsto [m(B(x,r))]^{-1} \int_{B(x,r)} f\, dm$ on jatkuva.[1]

Vastaus: Koska $[m(B(x,r))]^{-1}$ on vakio, riittää todistaa jatkuvaksi g, missä $g(x) := \int_{B(x,r)} f\, dm = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x,r)} f\, dm$, ts. todistetaan $g(x_n) \to g(x_0)$, kun $x_n \to x_0$, mielivaltaisella $x_0 \in \mathbb{R}^n$ [R1: 4.2].

Olkoon siis $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $(\chi_{B(x_n,r)} f)(y) \to (\chi_{B(x_0,r)} f)(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B(x_0,r)$, koska pienillä $|x_n - x_0|$ voitetaan mikä tahansa $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} y \in B(x_0,r) &\implies \chi_{B(x_n,r)}(y) = 1 = \chi_{B(x_0,r)}(y) \\ &\quad \text{kun } |x_n - x_0| < r - |y - x_0| =: \delta > 0; \\ y \in \bar{B}(x_0,r)^c &\implies \chi_{B(x_n,r)}(y) = 0 = \chi_{B(x_0,r)}(y), \\ &\quad \text{kun } |x_n - x_0| < |y - x_0| - r =: \delta > 0. \end{aligned}$$

Toisaalta $|\chi_{B(x,r)} f| \leq |f| \in L^1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, joten ($A := \partial B(x_0,r)$, jolloin $m(A) = 0$) dominoidun konvergenssin lauseen perusteella $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x_n,r)} f\, dm = \int_{A^c} \chi_{B(x_n,r)} f\, dm \to \int_{A^c} \chi_{B(x_0,r)} f\, dm = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x_0,r)} f\, dm = \int_{B(x_0,r)} f\, dm$, kun $x_n \to x_0$, QED.[2]

Tehtävä 12.2 ([7.19] *helpohko, nopeahko*):
$BV([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid V_f(b) < \infty\}$ (rajoitetusti heilahtelevat funktiot), $V_f(b) := \sup_{n,t_0,t_1,\ldots} \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|$ [7.19]. Todista:[3]

(i) Jos f on monotoninen ja rajoitettu, niin $f \in \mathrm{BV}([a,b])$.

(ii) Todista, että $g \in \mathcal{C}([0,1]) \setminus \mathrm{BV}([0,1])$, kun

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0; \\ x \sin(\frac{\pi}{x}), & \text{kun } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

(iii) Näytä, että $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ voidaan esittää kahden monotonisen funktion erotuksena.

(iv) Näytä, että $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ on rajoitettu.

Vastaus: (i) Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kasvava. Tällöin $V_f(b) := \sup \sum_{j=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sup \sum_{j=1}^n f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(b) - f(a) < \infty$. Jos f on laskeva, niin vastaavasti $V_f(b) < \infty$, QED.

(ii) Jatkuvien funktioiden tulo on jatkuva, joten $g \in \mathcal{C}^\infty(\{0\}^c)$. Toisaalta $|g(x) - g(0)| \leq |x| < \delta_\epsilon := \epsilon$, joten $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.
Osoitetaan, että $V_g > M$ mielivaltaisella $M < \infty$. Valitaan n s.e. $\sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j} > M$. $x_0 := 0$, $x_n := 1$, $x_j := \frac{1}{n-j+\frac{1}{2}}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. Tällöin $g(x_j) = x_j \sin[((n-j) + \frac{1}{2})\pi] = (-1)^{n-j} x_j$.

$$V_g(1) \geq \sum_{j=2}^{n-1} |g(x_j) - g(x_{j-1})| = \sum_{j=2}^{n-1} |x_j + x_{j-1}|$$

---

[1] **Vihje:** $\int_{B(x,r)} f\, dm = \int \chi_{B(x,r)} f\, dm$, sovella dominoitua konvergenssia.

[2] Kuten aiemmissa harjoituksissa todettiin, [R1: 4.2]:n perusteella em. lause pätee paitsi jonoille, myös $\mathbb{R}$-raja-arvoille (tai yleensä metristen avaruuksien raja-arvoille). Siis yllä olisi voitu kirjoittaa $x \to x_0$, kun ensin olisi todistettu dominoidun konvergenssin lause tässä sovellettavaan muotoon [R1: 4.2]:n avulla.

[3] **Vihjeitä:**(i) Määritelmästä. (ii) Olkoon $M < \infty$. Etsi $x_1, x_2, \ldots, x_{n_M}$ s.e. $V_g(1) \geq \ldots \geq M$. (iii) Sovella [7.19]:ää (osin pätee kaikille $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ei vain $f \in \mathrm{AC}$).

$$\geq \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{n-j+1} \overset{i:=n-j+1}{=} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i} > M.$$

(iii) $g(x) := [V_f(x)+f(x)]/2$, $h(x) := [V_f(x)-f(x)]/2$. Selvästi $f = g-h$. $V_f + f$ ja $V_f - f$ ovat kasvavia, mikä todistetaan kuten [7.19]:ssä.

(iv) $|f(x)| \leq |f(x)-f(a)| + |f(a)| \leq V_f(x) + |f(a)| \leq V_f(b) + |f(a)|$ $\forall x \in [a,b]$.

Tehtävä 12.3 ([8.14] *keskitasoa, lyhyehkö, paina tulos mieleesi!*):
[R2: Exe 8.4] **Konvoluutio** Jos $f,g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, niin niiden konvoluutio $f*g$ on funktio $(f*g)(q) := \int_{\mathbb{R}^n} f(q-r)g(r)\,dr$ (määritelty niillä q, joilla $f(q-\cdot)g(\cdot) \in L^1$).[4]

Olkoon $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \wedge g \in L^1(\mathbb{R}^n) \wedge 1 \leq p \leq \infty$. Todista, että $\exists (f*g)(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$, $f*g \in L^p$ ja $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.[5]

Vastauksen valmistelua: Minkovskin integraaliepäyhtälön todistaminen onnistuu kohtuuvaivalla, ks. esim. [TID2: 1.16.11].

Lause 0.0.1 (Minkovskin integraaliepäyhtälö) *Olkoot (Q,μ) ja (R,ν) σ-äärellisiä mitta-avaruuksia. Varustetaan $Q \times R$ mitalla $\mu \times \nu$; jos μ ja ν ovat täydellisiä, voidaan yhtä hyvin käyttää mittaa $\overline{\mu \times \nu}$. Olkoon $f \in \mathcal{L}(Q \times R, [0,\infty])$ ja $1 \leq p \leq \infty$*

$$\| \int_R f\,d\nu \|_{L^p(Q)} \leq \int_R \|f\|_{L^p(Q)}\,d\nu \leq \infty.$$

Huom.: $(q \mapsto \int_R f(q,\cdot)\,d\nu) \in \mathcal{L}(Q,[0,\infty])$ [Fubini]. Mitoista: $m_{\mathbb{R}^{2n}}$ on mitan $m_{\mathbb{R}^n} \times m_{\mathbb{R}^n}$ täydellistymä [R2:8.11], joten yo. lause soveltuu nyt hyvin.

Lauseen todistus onnistuu kohtuuvaivalla (esim. ensin yksinkertaisille funktioille, sitten ...). Todistus sivuutetaan (ks. esim. [TID2: 1.16.11]).

Varsinainen tehtävä: Seuraavassa $\|\cdot\|_p$ tarkoittaa $L^p(\mathbb{R}^n)$-normia argumentin q-suhteen.

$$\| \int |f(q-r)g(r)|\,dr \|_p \overset{MinkII}{\leq} \int \|f(q-r)g(r)\|_p\,dr$$

$$= \int |g(r)| \cdot \|f(q-r)\|_p\,dr = \int |g(r)| \cdot \|f\|_p\,dr = \|f\|_p \|g\|_1 < \infty,$$

joten $\int |f(q-r)g(r)|\,dr < \infty$ m.k. q, ts. $f(q-\cdot)g(\cdot) \in L^1$ m.k. q, joten $\exists (f*g)(q) := \int f(q-r)g(r)\,dr$ m.k. q. Lisäksi $\|f*g\|_p := \|\int f(\cdot-r)g(r)\,dr\|_p \leq \|\int |f(\cdot-r)g(r)|\,dr\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1$.

Tehtävä 12.4 ([8.16] *helpohko,nopeahko*):
Olkoon $0<p<\infty$ ja kuulukoon $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ heikkoon $L^p(\mathbb{R}^n)$:ään, ts. olkoon olemassa $c \geq 0$ s.e. $m(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > \lambda\}) \leq c\lambda^{-p}$ $\forall \lambda > 0$. Todista, että $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L \mid f|_K \in L^q(K)\ \forall K \subset\subset \mathbb{R}^n\}$, kun $0<q<p$.[6]

Vastaus: (Huom.: L :=mitallisten funktioiden ekvivalenssiluokat, ts. L^p yms. ovat L:n vektorialiavaruuksia.)
Olkoon $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, riittää siis todistaa $\int_K |f|^q\,dm < \infty$. Merkitään $g := |f|\big|_K$, $A := \{g>1\} := \{x \in K \mid g(x) > 1\}$. $\int_K |f|^q\,dm = \int_K g^q\,dm = \int_A g^q\,dm + \int_{A^c} g^q\,dm \leq \int_A g^q\,dm + m(K)$, joten riittää todistaa, että $\int_A g^q\,dm < \infty$.

$$\int_A g^q\,dm = \int_K (\chi_A g)^q\,dm \overset{8.16}{=} \int_0^\infty m\{\chi_A g > t\} q t^{q-1}\,dt = \int_0^1 m(A) q t^{q-1}\,dt$$

$$+ \int_1^\infty m\{g>t\} q t^{q-1}\,dt \leq m(A) + \int_1^\infty c t^{-p} q t^{q-1}\,dt < \infty,$$

koska $q-p-1 < -1$.[7]

Tehtävä 12.5 ([Bochner-integraali] *keskitasoa,keskipitkä*):
(Bochner-integraali ei kuulu koealueeseen.) Olkoon Q joukko, jossa on σ-algebra $\mathfrak{M}$ ja positiivinen mitta μ. Olkoon X Banach-avaruus, $f : Q \to X$ mitallinen numeroituva-arvoinen funktio (eli $f = \sum_{k=1}^\infty x_k \chi_{E_k}$, missä

---

[4] Tärkeää Lisäinfoa konvoluutiosta: [R2: Exercises 9.8&9.10 & Theorem 9.10].

[5] **Vihje:** Minkovskin integraaliepäyhtälö (ei tavallinen). Vaihtoehtoinen vihje: jäljittele Theorem 8.14:n todistusta.

[6] **Vihje:** Rajoitu johonkin $K \subset\subset \mathbb{R}^n$. $A := \{x \in K \mid f(x) > 1\}$, $\int_K = \int_A + \int_{A^c}$, sovella [R2:8.16].

[7] Tässä siis sovellettiin lausetta [R2:8.16] apufunktiolla $\phi(t) := t^q$, mikä on sallittua, koska $\phi \in \mathrm{AC}(0,T)$ $\forall T>0$ jne., koska $\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(s)\,ds \wedge \phi' \in L^1([0,T])$.

$x_k \in X$ & $E_k \in \mathfrak{M}$ $\forall k$ ja $k \neq n \implies E_k \cap E_n = \emptyset$ & $x_k \neq x_n$) ja $\|f(\cdot)\|_X \in L^1(\mu)$.[8] Jos $E \in \mathfrak{M}$, niin määritellään *Bochner-integraali*

$$\int_E f\, d\mu := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mu(E \cap E_k).$$

Osoita, että $\int_E f\, d\mu \in X$ on hyvin määritelty.

Vastaus: Koska f:n em. esitys on yksikäsitteinen ja $\|f\|_X$ on selvästi mitallinen (koska jokaisen joukon $\subset \mathbb{R}$ alkukuva $\|f\|_X$:llä on numeroituva yhdiste mitallisista joukoista $E_1, E_2, \ldots$).

1^o Todistetaan, että em. summa on olemassa. Tämä taas seuraa ao. lemmasta seuraavasti:

$$\infty > \|f\|_{L^1(Q,X)} := \int_Q \|f\|_X\, d\mu = \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \chi_{E_k}\, d\mu$$

$$\overset{[R2:1.27]}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_Q \|x_k\| \chi_{E_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \mu(E_k)\, d\mu \geq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \mu(E \cap E_k)\, d\mu,$$

joten $\exists \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mu(E \cap E_k)$ ao. lemman perusteella (sijoita $a_k := x_k \mu(E \cap E_k)$), QED.

Lemma 0.0.2 *Olkoon X Banach-avaruus ja $\{a_k\} \subset X$ sekä $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_X < \infty$. Tällöin $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ avaruudessa X; tästä käytetään merkintää $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (aivan kuten $\mathbb{C}$:ssäkin). Lisäksi summa on riippumaton termien järjestyksestä.*

Siis absoluuttisesti suppenevat sarjat suppenevat Banach-avaruuksissakin. Pätee tämä Fréchet-avaruuksissakin.

Todistus: Useimmat todistukset X:ssä ovat aivan samanlaisia kuin $\mathbb{C}$:lle, siis katso vain [R1]:n (tai [R2]:n) vastaava todistus läpi. Niin nytkin:

$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. On osoitettava, että $\{s_n\}$ on Cauchy-jono. Arvoilla $1 \leq n < m$ on

$$\|s_m - s_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| = r_m - r_n,$$

missä $r_n := \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|_X$. Koska $\{r_n\}$ on Cauchy-jono, $|r_m - r_n| < \epsilon$ kun $m, n > N_\epsilon$, joten sama N_ϵ kelpaa myös jonolle $\{s_n\}$, siis $\exists \lim_n s_n =: s$.

Olkoon $m_1, m_2, \ldots$ lukujen $1, 2, \ldots$ uudelleenjärjestys ja olkoon $s'_n := \sum_{k=1}^{n} a_{m_k}$. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan N_ϵ kuten yllä. Valitaan N'_ϵ s.e. $m_1, m_2, \ldots, n_{N'_\epsilon}$ sisältää luvut $1, 2, \ldots, N_\epsilon$. Jos nyt $n \geq N'_\epsilon$, niin

$$|s'_n - s_n| \leq |\sum_{k\in\{1,\ldots,n\},\ m_k > N_\epsilon} a_{m_k}|$$

(koska s_m on supistanut arvot $k \leq N_\epsilon$ pois s'_n:sta)

$$\leq |\sum_{n \geq m > N_\epsilon} a_m| < \epsilon,$$

joten $\lim_n s'_n = \lim_n s_n$, QED. $\square$

2^o Yksikäsitteisyys: Olkoon $f = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k \chi_{E'_k}$, missä jälleen $x'_k \in X$ & $E'_k \in \mathfrak{M}$ $\forall k$ ja $k \neq n \implies E'_k \cap E'_n = \emptyset$ & $x_k \neq x_n$).

Tällöin luvut x'_k ovat funktion f arvot eli luvut x_k jossain järjestyksessä, ts. on olemassa lukujen $1, 2, \ldots$ uudelleen järjestys $m_1, m_2, \ldots$ s.e. $x'_k = x'_{m_k}$ $\forall k$. Niinpä $E'_k := f^{-1}(\{x'_k\}) = f^{-1}(\{x_{m_k}\}) = E_{m_k}$ ja siksi $x'_k \mu(E'_k \cap E) = x_{m_k} \mu(E_{m_k} \cap E)$ kaikilla k, joten lemman perusteella tämän toisen esityksen antama integraali (eli summa) on sama kuin alkuperäinen. Siis integraalin arvo ei ole riippuvainen f:n esityksen valinnasta, pelkästään

[8] Jos $g : Q \to X$ on Bochner-mitallinen (merkitään $g \in \mathcal{L}(Q, X)$) ja $\|g\| \in L^1(Q, \mathbb{C}) = L^1(Q)$, niin merkitään $g \in L^1(Q, X)$.

f:stä, joten integraali on hyvin määritelty.[9] [10] [11][12] [13]

[9]Samantapainen yksikäsitteisyysongelma on myös [R2: 1.23]:ssa, joskin nopeammin OK:ksi todettavissa.

[10]Ehto $x_n \neq x_k$ olisi myös poistettavissa joko integraalin (helposti todistettavien) ominaisuuksien tai $\{E_k\}$:n ja $\{E'_k\}$:n yhteisen hienonnuksen $\{E''_k\} := \{E_i \cap E'_j \mid i, j \geq 1\}$ avulla (sen avulla määritelty integraali on todistettava samaksi kuin $\{E_k\}$:n avulla määritelty (samaan tapaan kuin yo. lemma), ja vast. samaksi kuin $\{E'_k\}$:n avulla määritelty, joten nämä ovat siis keskenäänkin samat).

[11]Olisi voitu myös tehdä kuten kirjassa [R2] (tapauksessa $X = \mathbb{C}$) eli määritellä vain $\int_Q f\, d\mu$ ja sitten merkitä $\int_E f\, d\mu := \int_Q \chi_E f\, d\mu$; kunhan mielivaltaisen $L^1(Q, X)$-funktion integraali ensin määritellään (kuten ed. alaviitteessä).

[12]Jos $g \in L^1(Q, X)$, niin on olemassa mitallisten yksinkertaisten funktioiden jono $\{f_n\}$ s.e. $f_n \to g$ avaruudessa L^1 [TID: Lause 1.11.4]. Tällöin $\int_E g\, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$ on hyvin määritelty. Jos $X = \mathbb{C}$, niin saadaan täsmälleen Lebesguen integraali. Huom.: $\| \int_Q g\, d\mu\|_x \leq \int_Q \|g\|_X\, d\mu =: \|g\|_{L^1(Q,X)}$, joten $\int_Q \in \mathcal{L}(L^1(Q, X), X)$ ja $\| \int_Q \| \leq 1$.

[13]Bochner-integraali toteuttaa miltei kaikki [R2]:n lauseet Lebesgue-integraalista (tosin AC-funktioilla ei välttämättä ole derivaattaa, paitsi jos X on Hilbert-avaruus tai muu refleksiivinen avaruus) [TID]. Erityisesti $\int_Q Tf = T \int_Q f$, kun $f \in L^1(Q, X)$ ja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, mistä seuraa, että Bochner-integroituvat ovat Pettis-integroituvia [R3: Def. 3.26]. Asiaan ei kannattane perehtyä ennen kuin sitä tarvitsee; joissain kirjoissa (esim. [Rauch]) kuitenkin varoittamatta integroidaan (tai derivoidaan; derivaatalle yleistyvät suunnilleen kaikki [R1]:n tulokset väliarvolausetta (ei päde edes $\mathbb{C}^2$:ssa) lukuunottamatta) funktioita, joiden arvot ovat jossain muussa Banach-avaruudessa kuin $\mathbb{C}$.