Mat-1.150 Reaalianalyysi: 11. harj. vastauksineen ma 12.4.1999 (3 sivua) Viimeiset (12.) laskuharjoitukset ovat ma 19.4. normaaliin aikaan 12.15-14. Toinen välikoe on ke 12.5. klo 13–16 muiden kokeiden yhteydessä, kuten alunperin sovittiin. Tarkka koealue ilmoitetaan 12. mallivastauksissa.

Tehtävä 11.1 ([7.5] *helppo, lyhyt*):
Osoita, että $f(x) := |x|^{-n}$ kuuluu heikkoon $L^1(\mathbb{R}^n)$:een muttei $L^1(\mathbb{R}^n)$:een.

Tärkeää taustatietoa: Seuraavat kaksi lemmaa (ja $\mathbb{R}^n$:n napakoordinaatit [R2: p. 176, Exe 8.6]) kuuluvat yleissivistykseen! Muista, että löydät ne tästä.

Lemma 0.0.1 *Olkoon $g : [0,\infty[\to [0,\infty]$ Borel-funktio (eli Borel-mitallinen, siis esim. paloittain jatkuva). Tällöin*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(|x|)dx = \int_0^\infty g(r)a_n r^{n-1}\,dr$$

missä a_n on $\mathbb{R}^n$:n yksikköpallopinnan $(n-1)$-ulotteinen mitta ("pinta-ala") (r-säteisen $n-1$-mitta on $a_n r^{n-1}$; ko. pallon "tilavuus" (n-mitta) on $m(B_r) = v_n r^n$, missä $0 < a_n, v_n < \infty$.) [R2: p. 176, Exe 8.6]

Tästä saadaan suoraan ($g(r) := \chi_{]R_1,R_2[}r^{-p}$):

Lemma 0.0.2

$$\int_{R_1<|z|<R_2} |z|^{-p}\,dz = a_n\int_{R_1}^{R_2} r^{-p}r^{n-1}\,dr = \frac{a_n}{n-p}\Big|_{R_1}^{R_2} r^{n-p}\ (p\neq n,\ \textit{muutoin}\ a_n\log r)$$

Joten $p<n \iff z^{-p}\in L^1(B_R)$, $\quad p>n \iff z^{-p}\in L^1(B_R^c)$.
Erityisesti $\frac{M}{1+|x|^a} \in L^p$ $1\le p\le\infty$, kun $a>n$.

Vastaus:

$$m(\{|f|>\lambda\}) = m(\{|x|^n < \lambda^{-1}\}) = m(\{|x| < \lambda^{-1/n}\})$$
$$= m(B(0,\lambda^{-1/n})) = m(B_{\mathbb{R}^n}(0,1))\cdot(\lambda^{-1/n})^n = v_n\lambda^{-1},$$

joten $\lambda m(\{|f|>\lambda\}) = v_n$ on rajoitettu eli $f \in$ heikko L^1. Kuitenkin $\int_{\mathbb{R}^n} f\,dm \ge \int_{B(0,1)} f\,dm = a_n\int_0^1 r^{-n}r^{n-1}\,dr = a_n|_0^1 \ln r = \infty$ lemman perusteella, ts. $f\notin L^1$ (mikään $|x|^p$, $p\in\mathbb{R}$ ei kuulu L^1:een missään $\mathbb{R}^n$), QED.

Tehtävä 11.2 ([7.5] *helpohko, lyhyehkö*):
Todista seuraavat maksimaalifunktioita koskevat väitteet.[1]
(i) $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^k) \wedge \exists a\in\mathbb{R}^k\ [Mf(a)=0] \implies f(x)=0$ m.k. $x\in\mathbb{R}^k$.
(ii) $f,g\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^k) \implies M(f+g)(x)\le Mf(x)+Mg(x)$.
(iii) $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^k) \wedge \lambda\in\mathbb{R} \implies M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x)\ \forall x\in\mathbb{R}^k$.
(iv) $f\in L^1(\mathbb{R}) \not\Longleftarrow Mf\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) := \{g\in\mathcal{L}(\mathbb{R})\mid \|g\|_{L^1(K)} := \int_K|g| < \infty\ \forall K\subset\subset\mathbb{R}\}$. (Ohje: $f(x) := \chi_{]0,1/2[}(x)/[x(\log x)^2]$.)[2]

Vastaus: Pari huomiota ensin: Olkoon $f,g : X\to\mathbb{R} \wedge \lambda\ge 0$. Tällöin $\sup_{x\in X}[f(x)+g(x)] \le \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x)$ ja $\sup_{x\in X}\lambda f(x) = \lambda\sup f(x)$ (htll). Maksimifunktion määritelmä on

$$Mf(a) := \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1}\int_{B(a,r)}|f|\,dm\ (a\in\mathbb{R}^k,\ f\in L^1_{\text{loc}}).$$

(Saisi toki olla $f\in\mathcal{L}\setminus L^1_{\text{loc}}$, mutta sellaiset funktiot ovat tylsiä, kun $Mf(a)=\infty\ \forall a\in\mathbb{R}^k$ (tod.: jos $\int_K|f|=\infty$, valitse r s.e. $K\subset B(a,r)$).

(i) $0 = Mf(a) := \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1}\int_{B(a,r)}|f|\,dm$

$$\implies 0 = \int_{B(a,r)}|f|\,dm\ \forall r>0,$$

joten $\forall r>0\ \exists$ nollajoukko $N_r\subset B(a,r)$ s.e. $f(x)=0\ \forall x\in B(a,r)\setminus N_r$. Merkitään $N := \cup_{n=1}^\infty N_n$, jolloin $f(x)=0\ \forall x\notin N$, QED.

(ii) $M(f+g)(a) := \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1}\int_{B(a,r)}|f+g|\,dm$

$$\le \sup_{0<r<\infty}[m(B_r)^{-1}\int_{B(a,r)}|f|\,dm + m(B_r)^{-1}\int_{B(a,r)}|g|\,dm]$$

$$\le \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1}\int_{B(a,r)}|f|\,dm + \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1}\int_{B(a,r)}|g|\,dm$$

---

[1]**Vihjeitä**: Muut suoraan määritelmistä, (iv): laske $Mf(x)\ \forall x\in]0,1/4[$ ja totea integroitumattomaksi.

[2]Tässä, kuten yleensäkin kirjallisuudessa, $\log := \ln$.

$= Mf(a) + Mg(a)$, QED.

(iii) $M(\lambda f)(a) := \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |\lambda f|\, dm$

$$= \sup_{0<r<\infty} |\lambda| m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |f|\, dm$$

$$= |\lambda| \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B(a,r)} |f|\, dm = |\lambda| Mf(a), \text{ QED.}$$

(iv) Tiivistelmä:
1^o $f \in L^1$;
2^o $(Mf)(x) \geq (2x)^{-1}/\log x^{-1} =: g(x)\ \forall x \in]0, 1/4[$.
3^o $\int_0^{1/4} g(x)\, dx = \infty$, joten $\int_0^{1/4} Mf(x)\, dx = \infty$; siis $Mf \notin L^1([0, 1/4])$, joten $Mf \notin L^1_{loc}$, QED.

Ratkaisu: 1^o $f \in L^1$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\, dm = \int_0^{1/2} \frac{1}{t} (\log t)^{-2}\, dt = \Big|_0^{1/2} - (\log t)^{-1}$$

$$= (-\infty)^{-1} - (\log 1/2)^{-1} = 1/\log 2 < \infty.$$

2^o Supremum r:stä $\geq$ arvo kohdassa $r = x$, ja toisaalta $B(x, x) =]0, 2x[$, joten $(Mf)(x) \geq$

$$(B(x,x))^{-1} \int_0^{2x} |f| > (2x)^{-1} \int_0^x (\log t)^{-2} t^{-1}\, dt = (2x)^{-1}|_0^x - (\log t)^{-1}$$

$$= (2x)^{-1}[-(\log x)^{-1} + (-\infty)^{-1}] = (2x)^{-1}/\log x^{-1}\ \forall x \in]0, 1/4[,$$

3^o joten (sijoitus $s = 1/x$, $x = 1/s, dx/ds = -s^{-2}$) $\int_0^{1/4} (Mf)(x)\, dx \geq \int_0^{1/4} 1/2x \log x^{-1}\, dx = \frac{1}{2} \int_4^\infty 1/s \log s\, ds = \frac{1}{2} \Big|_4^\infty \log(\log s) = \infty$.

Tehtävä 11.3 ([7.20] *helpohko, lyhyehkö*):
Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ on *Lipschitz-jatkuva* eksponentilla $\alpha \geq 0$ (merkitään $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([a, b]) =: \mathrm{Lip}_\alpha([a, b])$), joss on olemassa vakio $L_f \geq 0$ s.e.

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f |x - y|^\alpha\ \forall x, y \in [a, b].$$

Todista:[3]
(i) $f \in \mathcal{C}^1_b(]a, b[) \implies f \in \mathcal{C}^{0,1}(]a, b[)$ (ts. jos f ja f' ovat jatkuvia ja rajoitettuja, niin $f \in \mathcal{C}^{0,1}(]a, b[)$).
(ii) [R2: Exe7.10] $f \in \mathcal{C}^{0,1}([a, b]) \iff f \in \mathrm{AC}([a, b]) \wedge f' \in L^\infty$.
(iii) [R2: Exe7.11] $f \in \mathrm{AC}([a, b]) \wedge f' \in L^p([a, b]) \wedge p \in]1, \infty[\implies f \in \mathcal{C}^{0,1-1/p}([a, b])$.
(iv) $\alpha > 1 \wedge f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([a, b]) \implies f$ on vakio.

Vastaus: Huom.: $f \in \mathrm{AC} \implies \exists f'(x)$ m.k. [7.20] ja $\exists f'(x)\ \forall x \implies f \in \mathrm{AC}$ [7.21] (mutta $\exists f'(x)$ m.k. $\not\Longrightarrow f \in \mathrm{AC}$ [7.16b]). AC-funktiot ovat ne, jotka ovat derivaattojensa integraaleja (ht).

(i) Valitaan $L_f := \|f'\|_\infty = \sup |f'| < \infty$. Jos $a < y \leq x < b$, niin

$$|f(x) - f(y)| = |\int_y^x f'(t)\, dt| \leq \int_y^x |f'(t)|\, dt \leq \int_y^x L_f\, dt = |x - y| L_f.$$

Tapaus $y > x$ hoituu paikkoja vaihtamalla, QED.

(ii) "$\Longleftarrow$": Todistetaan kuten (i):ssä (vrt. [7.20]). "$\Longrightarrow$": Olkoon $f \in \mathcal{C}^{0,1} \wedge \epsilon > 0$. Valitaan $\delta_\epsilon := \epsilon/L_f$. Nyt AC-määritelmässä [7.17] on

$$\sum_{i=1}^n |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| \leq \sum_{i=1}^n L_f |\beta_i - \alpha_i| < L_f \delta_\epsilon = \epsilon,$$

joten δ_ϵ kelpaa, siis $f \in \mathrm{AC}$. Siksi $\exists f'(y)$ m.k. y. Tulos $\|f'\|_\infty \leq L_f < \infty$ seuraa siitä, että näillä y on

$$|f'(x)| = \left| \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = \lim_{y \to x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right|$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq \limsup_{y \to x} \frac{L_f |y - x|}{|y - x|} = L_f.$$

(iii) $|f(s) - f(t)| = |\int_t^s f'| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f'\|_{L^p([t,s])} \|1\|_{L^q([t,s])} \leq \|f'\|_p |s - t|^{1/q}$, QED.

---

[3]**Vihjeitä**: Muista, että AC-funktio on derivaattansa integraali [7.20]. (iv): Valitse $\{t_i\}$ tasavälein.

(iv) Olkoon $c \in [a,b]$. $a_{n,k} := a + k(c-a)/n\ \forall k, n$. Tällöin

$$|f(c)-f(a)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(a_{n,k}) - f(a_{n,k-1})\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(a_{n,k}) - f(a_{n,k-1})|$$

$$\le L_f \sum_{k=1}^{n} |a_k - a_{n,k-1}|^\alpha = L_f \sum_{k=1}^{n} |(c-a)/n|^\alpha = L_f |(c-a)/n|^\alpha n = L_f (c-a)^\alpha n^{1-\alpha}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}_+$, ja toisaalta $n^{1-\alpha} \to 0$, kun $n \to \infty$, joten $|f(c)-f(a)| = 0$, tämä siis mielivaltaisella $c \in [a,b]$, joten $f \equiv f(a) \in \mathbb{C}$, QED.

Kommentteja: $f \in \mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ ilmaistaan joskus sanomalla "f toteuttaa Lipschitz-ehdon (Hölder-ehdon) vakiolla α" tai f on "Hölder-jatkuva eksponentilla α tms.". $\mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ on Banach-avaruus normilla $\|f\| := M_f + \sup_x |f(x)|$ [R2:Exe5.11], missä M_f on sopivien L_f infimum (se on myös minimi); $\mathcal{C}_b^1([a,b]) \subsetneq \mathrm{Lip}_1([a,b]) \subsetneq \mathrm{AC}([a,b]) \subsetneq \mathrm{BV}([a,b]) \cap \mathcal{C}([a,b])$ (ht).

Tehtävä 11.4 ([7.1] *helpohko, lyhyehkö*):
Todista, että kirjan lauseessa 7.1 pätee (b) $\Longrightarrow$ (a); tässä $f(x) = \mu((-\infty, x))$ ja μ on kompleksinen Borel-mitta $\mathbb{R}$:llä, sekä

(a) $\exists f'(x) = A$

(b) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ s.e. $|\frac{\mu(I)}{m(I)} - A| < \epsilon$, kun $I \subset \mathbb{R}$ on avoin väli, $x \in I$ ja $m(I) < \delta_\epsilon$.

Vastaus: "(b) $\Longrightarrow$ (a)" Oletetaan (b). Merkitään $I_n := (x-1/n, x+1/n)$, jolloin $m(I_n) = 2/n$. Nyt $\mu(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(I_n)$ [R2: 1.19e][4], joten, $\mu(I_n)/m(I_n) = n\mu(I_n)/2 \to A$ vaatii, että $\mu(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(I_n) = 0$ (muutoin olisi $|n\mu(I_n)/2| = |\mu(I_n)|n/2 \to |\mu(\{x\})|\infty = \infty$).

Olkoon sitten $\epsilon > 0$. Meidän riittää todistaa, että kun $0 < h < \delta_\epsilon$ (siis käytämme (b)-kohdan arvoa δ_ϵ, se sattuu kelpaamaan tähänkin), niin $|[f(x+h) - f(x)]/h - A| < \epsilon$ (tapaus $0 < -h < \delta_\epsilon$ eli vasemmanpuoleinen derivaatta hoituu vastaavasti, joten jätetään se lukijalle). Nyt

$$f(x+h) - f(x) = \mu((-\infty, x+h)) - \mu((-\infty, x)) = \mu([x, x+h)) = 0 + \mu((x, x+h)),$$

joten $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - A| = |\mu((x,x+h))/h - A| < \epsilon$. Siis todella $\exists f'(x) = A$ (siis oikeastaan todistimme oikeanpuoleisen derivaatan olevan olemassa ja $= A$, aivan vastaavasti nähdään $\exists$ vasen derivaatta $= A$).

Todistetaan ajankuluksi myös käänteinen:

"(a) $\Longrightarrow$ (b)" Tutkitaan ensin tämä helpompi suunta: Valitaan $\delta > 0$ s.e. $|t - x| < \delta \Longrightarrow |\frac{f(t)-f(x)}{t-x} - A| < \epsilon/3$. Jos nyt $I = (a,b)$, $a < x < b$ ja $b - a < \delta$, niin $\mu(I) = \mu((-\infty, b)) - \mu((-\infty, a]) = \mu((-\infty, b)) - \lim_{t\to a+} \mu((-\infty, t))$ [R2: 1.19d], joten

$$|\frac{\mu(I)}{m(I)} - A| = |\frac{f(b) - \lim_{t\to a+} f(t)}{b-a} - A| = \lim_{t\to a+} |\frac{f(b)-f(t)}{b-t} - A| \tag{1}$$

$$= \limsup_{t\to a+} |\frac{f(b)-f(x)}{b-t} + \frac{f(x)-f(t)}{b-t} - A| \tag{2}$$

$$= \limsup_{t\to a+} |\frac{b-x}{b-t}\frac{f(b)-f(x)}{b-x} + \frac{x-t}{b-t}\frac{f(x)-f(t)}{x-t} - [\frac{b-x}{b-t} + \frac{x-t}{b-t}]A| \tag{3}$$

$$\le \limsup_{t\to a+} \left[|\frac{b-x}{b-t}\frac{f(b)-f(x)}{b-x} - \frac{b-x}{b-t}A| + |\frac{x-t}{b-t}\frac{f(x)-f(t)}{x-t} - \frac{x-t}{b-t}]A|\right] \tag{4}$$

$$\le \limsup_{t\to a+} \left[\frac{b-x}{b-t}\epsilon + \frac{x-t}{b-t}\epsilon\right] = \epsilon, \text{ QED .} \tag{5}$$

(Voisi tuossa limmejä käyttää limsuppien sijaan, tuo vain on hitusen nopeammin tarkistettavissa.)

[4] Sivulla 17 sanotaan, että 1.19 pätee myös kompleksisille mitoille.