Mat-1.150 Reaalianalyysi: 10. harj. vastauksineen ma 29.3.1999 (3 sivua)

Tehtävä 10.1 ([6.10] *helpohko, nopeahko*):
Olkoon λ, μ ja ν äärellisiä positiivisia mittoja[1] $(X, \mathfrak{M})$:llä.
(i) Jos $\nu \ll \mu \ll \lambda$, niin todista "ketjusääntö" $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$.
(ii) Jos $\mu \ll \lambda \ll \mu$, niin todista, että $\frac{d\mu}{d\nu} = (\frac{d\nu}{d\mu})^{-1}$.
(iii) Jos $\nu \ll \mu$, niin todista, että $\nu(\{x \in X \mid \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\} = 0$.

Vastaus: Huom.: jos $\mu \ll \lambda$, niin[2] $\exists! f \in L^1(\lambda)$ s.e. $\mu(E) = \int_E f\,d\lambda\ \forall E \in \mathfrak{M}$ [R2:6.10] ja tällöin merkitään $\frac{d\mu}{d\lambda} := f$.

(i) Merkitään $f := \frac{d\mu}{d\lambda} \wedge g := \frac{d\nu}{d\mu} \wedge h := \frac{d\nu}{d\lambda}$ (onhan $\nu \ll \lambda$, koska $\ll$ on transitiivinen, koska $\lambda(E) = 0 \Longrightarrow \mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0$).

$$\int_E h\,d\lambda = \nu(E) = \int_E g\,d\mu \stackrel{1.29}{=} \int_E gf\,d\lambda \quad \forall E \in \mathfrak{M},$$

joten $\int_E (h - gf)\,d\lambda = 0\ \forall E \in \mathfrak{M}$, joten $h - gf = 0$ m.k.$[\lambda]$ [1.39b], QED.

(ii) $\int_E 1\,d\mu = \mu(E) = \int_E \frac{d\mu}{d\mu}\,d\mu\ \forall E \in \mathfrak{M}$, joten $\frac{d\mu}{d\mu} = 1$ m.k.$[\mu]$. (i)$\Longrightarrow$ $1 = \frac{d\mu}{d\mu} = \frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}$ m.k.$[\mu] \Longrightarrow \frac{d\mu}{d\nu} = (\frac{d\nu}{d\mu})^{-1}$ m.k.$[\mu]$.[3]

(iii) $N := \{x \in X \mid \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\}$. $\nu(N) = \int_N \frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu = \int_N 0\,d\mu = 0$, QED.

Tehtävä 10.2 ([6.14] *ei niin tärkeä*):
Olkoot μ, ν äärellisiä positiivisia mittoja $(X, \mathfrak{M})$:ssä. Näytä, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät (ekvivalentit):
(i) $\mu \perp \nu$, (ii) $\mu \wedge \nu = 0$, (iii) $\mu \wedge \nu = \mu + \nu$,
missä $\mu \vee \nu := \mu + (\nu - \mu)^+ \wedge \mu \wedge \nu := \mu - (\nu - \mu)^-$.

[1]Positiivinen mitta on äärellinen joss se on kompleksinen mitta [R2:1.18&6.1].
[2]"$\exists!$" := "on olemassa yksikäsitteinen".
[3]Koska $\lambda \ll \mu \ll \lambda$, on tämä pätee myös m.k.$[\lambda]$. Siis $h = gf$ myös $L^1(\lambda)$:n alkiona (ja $L^1(\mu)$:n alkiona). Itse asiassahan $h := \frac{d\nu}{d\lambda}$ ei ole edes määritelty pisteittäin vaan ainoastaan $L^1(\lambda)$:n alkiona, siis gf on yhtä hyvä edustaja sille kuin tästä nollamitallisissa joukoissa poikkeavat funktiotkin (ja g ja f eivät nekään ole kuin m.k. määriteltyjä).

Vastaus: Huom.: nyt $\mu = |\mu| \wedge \nu = |\nu|$. Käytämme tehtävän 9.3/K97 (http://www.math.hut.fi/ kmikkola/mat/rea/) tuloksia: jos μ, ν ovat reaalisia mittoja, niin

(a) $\lambda := \mu \vee \nu$ on pienin reaalinen mitta, jolle pätee $\lambda(E) \geq \mu(E) \wedge \lambda(E) \geq \nu(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}$; ts. $\pi \geq \mu \wedge \pi \geq \nu \Longrightarrow \pi \geq \mu \vee \nu$. Vastaavasti $\pi \leq \mu \wedge \pi \leq \nu \Longrightarrow \pi \leq \mu \wedge \nu$. (Huom.: $\max(\mu, \nu)$ ei ole välttämättä mitta (eikä $\max(\mu, \nu)$).)

(b) Jos $\pi >> \mu, \nu$ (esim. $\pi = |\mu| + |\nu|$), niin $\pi >> \mu \wedge \nu, \mu \vee \nu$ ja $\frac{d\mu\vee\nu}{d\pi} = \max(\frac{d\mu}{d\pi}, \frac{d\nu}{d\pi}) \in L^1(\pi)$ sekä $\frac{d\mu\wedge\nu}{d\pi} = \min(\frac{d\mu}{d\pi}, \frac{d\nu}{d\pi}) \in L^1(\pi)$.

Ratkaisu: Merkitään taas $\mu << A \iff \mu(A^c) = 0$. Koska mitat ovat positiivisia, alla $f, g \geq 0$ (tai oikeastaan ne ovat $L^1(\pi)$-"funktioita", ts. ne voi uudelleenmääritellä miten tahansa nollajoukossa ja ovat siis vain ≥ 0 m.k. (jos olisi < 0 jossain positiivimitallisessa E, niin olisi $\mu(E) = \int_E f\,d\pi < 0$, mikä on ristiriita), mutta valitaan edustajat, jotka ovat ≥ 0).

(i) $\Longrightarrow$ **(ii)** Olkoon $\mu \ll A \wedge \nu \ll A^c$. $\pi := \mu + \nu >> \mu, \nu$, $f := \frac{d\mu}{d\pi}$, $g := \frac{d\nu}{d\pi}$, jolloin $f, g \geq 0$ ja $\int_{A^c} f\,d\pi = \mu(A^c) = 0$ eli $f = 0$ m.k.$[\pi]$ A^c:ssä, ts. $f = 0$ joukossa $A^c \setminus N_f$, missä $\pi(N_f) = 0$ ja vast. $g = 0$ joukossa $A \setminus N_g$. Niinpä $\min(f, g) = 0$ joukossa $(A^c \setminus N_f) \cup (A \setminus N_g) \supset (N_f \cup N_g)^c$ ja $\pi(N_f \cup N_g) = 0$, joten $\min(f, g) = 0$ m.k. Siis $\mu \wedge \nu(E) = \int_E \min(f, g)\,d\pi = 0\ \forall E \in \mathfrak{M}$, QED.

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)** Olkoon $\mu \wedge \nu = 0$, määritellään f, g, π kuten yllä. $N := \{\min(f, g) \neq 0\}$. $A := \{g = 0\} \in \mathfrak{M}$. Nyt $\min(f, g) = 0$ m.k.$[\pi]$, joten $\pi(N) = 0$. Välttämättä $f = 0$ joukossa $A^c \setminus N$ (koska A^c:ssä $g > 0$ mutta silti $\min(f, g) = 0$ $A^c \setminus N$:ssä). Niinpä $\mu(A^c) = \int_{A^c} f\,d\pi = 0$, joten $\mu \ll A$. Toisaalta $\nu(A) = 0$, joten $\mu \perp \nu$, QED.

(ii) $\iff$ **(iii)** $f + g = \min(f, g) + \max(f, g)$, joten $\mu + \nu = \mu \wedge \nu + \mu \vee \nu$, joten $\mu \vee \nu = \mu + \nu \iff \mu \wedge \nu = 0$, QED.

Tehtävä 10.3 ([6.16] *keskitasoa, keskipitkä, tärkeä käsite*):
Olkoon Z normiavaruus. Sanotaan, että jono $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset Z$ suppenee *heikosti* Z:ssa kohti pistettä $f \in Z$ (merkitään $f_j \rightharpoonup f$) joss

$$\Lambda f_j \stackrel{j\to\infty}{\to} \Lambda f \quad \forall \Lambda \in Z^* := \mathcal{L}(Z, \mathbb{C}).$$

(Kirjassa ([R2]) käytetään skalaarikuntaa $\mathbb{C}$; [R3]:ssa todistetaan tulokset sekä $\mathbb{C}$:lle että $\mathbb{R}$:lle.)

(i) Olkoon $1 < p < \infty \wedge 1/q + 1/p = 1$ ja olkoon $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ mitta-avaruus. Todista, että $f_j \to f$ heikosti avaruudessa $L^p(\mu)$ joss

$$\forall g \in L^q(\mu) \ \left[\int_X f_j g\, d\mu \stackrel{j\to\infty}{\to} \int_X fg\, d\mu\right].$$

(ii) Todista $f_j \to f \implies f_j \rightharpoonup f$. Osoita, että käänteinen ei aina päde.[4]

(iii) Todista $f_j \rightharpoonup f \implies \|f\|_p \le \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|_p$.

Vastaus: [5] **(i)** $\forall \Lambda \in L^p(\mu)^*\ \exists! g_\Lambda \in L^q(\mu)\ \ [\Lambda(f) = \int_X f g_\Lambda\, d\mu \ \ \forall f \in L^p(\mu)]$ ja lisäksi $\|g_\Lambda\|_q = \|\Lambda\|_{L^p(\mu)^*}$ $\forall \Lambda$ [6.16]. Toisaalta Hölderin epäyhtälön etc. perusteella jokainen $g \in L^q(\mu)$ selvästi määrää jonkin $\Lambda \in L^p(\mu)^*$, joten kuvaus $\Lambda \mapsto g_\Lambda$ on isometrinen isomorfismi $L^p(\mu)^* \to L^q(\mu)$, eli nämä kaksi avaruutta voidaan samaistaa (Banach-avaruuksina) [6.16][6]. Tämä on tärkeää muistaa!

Niinpä $\int_X f_j g_\Lambda\, d\mu = \Lambda f_j \to \Lambda f = \int_X f g_\Lambda\, d\mu \ \ \forall \Lambda \in L^p(\mu)^*$ joss $\int_X fg\, d\mu \to \int_X fg\, d\mu\ \forall g \in L^q(\mu)$, QED.

(ii) $\Lambda \in \mathcal{L}(Z, \mathbb{K})$ kertoo, että Λ on jatkuva (ja lineaarinen), joten [Rudin1]:n perusteella $\Lambda \lim_j f_j = \lim_j \Lambda f_j$ aina kun $\Lambda \in Z^*$, siis $f_j \rightharpoonup f$, QED.

Olkoon sitten $Z = \ell^p(\mathbb{N}_+) \ni e_j := \chi_j(\cdot)$ (ts. $e_1 := (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 := (0, 1, 0, 0, \ldots)$ jne.). Tällöin $\|e_j\|_p^p := \sum_{k=1}^\infty |e_j(k)|^p = 1^p = 1\ \forall j$, joten $d(e_j, 0) = \|e_j - 0\|_p = 1 \not\to 0$ (siis $e_j \not\to 0$, eikä muuallekaan, koska e_j ei ole Cauchy-jono, koska $\|e_j - e_k\| = 2^{1/p} \Leftarrow j \ne k$), mutta jos $\Lambda \in \ell^p(\mathbb{N})^*$ eli $g := g_\Lambda \in \ell^q(\mathbb{N})$, niin

$$\Lambda(e_j) = \int_{\mathbb{N}} e_j g\, d\sigma = \sum_{k\in\mathbb{N}} e_j(k) g(k) = 0 + 1 \cdot g(j) = g(j) \to 0,$$

koska $\infty > \|g\|_q^q = \sum_{j=1}^\infty |g(j)|^q \implies |g(j)|^q \to 0 \implies |g(j)| \to 0$. Siis $e_j \rightharpoonup 0$.[7]

(iii) Olkoon $f_j \rightharpoonup f$. Valitaan $\Lambda \in Z^*$ s.e. $\|\Lambda\| = 1 \wedge \Lambda(f) = \|f\|_Z$ [R2:5.20]. Tällöin[8]

$$\|f\|_Z = \Lambda f = |\Lambda f| = |\lim_j \Lambda f_j| = \lim_j |\Lambda f_j| = \liminf_j |\Lambda f_j|$$
$$\le \liminf_j \|\Lambda\| \|f_j\| = \liminf_j \|f_j\|.$$

Tehtävä 10.4 ([7.10] *triviaali*):
[R2:Exe7.1] Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$. Osoita, että $|f(x)| \le (Mf)(x)$ kaikilla f:n Lebesgue-pisteillä x.

Vastaus: Jos x on f:n Lebesgue-piste, niin

$$|f(x)| \stackrel{7.10}{=} \lim_{r\to 0} m(B_r)^{-1} \int_{B_r(x)} |f|\, dm \le \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B_r(x)} |f|\, dm =: Mf.$$

Tehtävä 10.5 ([Luku 3 (tai 6)] *helppo, lyhyt, tulos hyvin tärkeä*):
Olkoon $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ σ-äärellinen positiivinen mitta-avaruus, $1 \le p \le \infty$ ja $f \in L^p(\mu)$. Osoita:

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \sup_{\|g\|_{L^q(\mu)} \le 1} \int_X |fg|\, d\mu.$$

---

[4] Vihje: $Z = \ell^p(\mathbb{N}_+)$, $f_1 := (1, 0, 0, \ldots)$, $f_2 := (0, 1, 0, 0, \ldots)$, jne.

[5] **Ylikurssiasiaa:** (kuten nämä alaviitteet usein ovat) Huom.: normiavaruuteen Z voidaan aina määritellä heikko topologia $\mathcal{T}_w$, jossa jono suppenee joss se suppenee heikosti Z:ssa [R3:3.11]. Äärellisulotteisissa normiavaruuksissa ($\mathbb{C}^n$ tms.) tämä topologia on sama kuin tavallinen euklidinen topologia (koska muita äärellisulotteisia (TVS:iä, ts.) Hausdorffin vektoritopologioita (summa ja skalaarikertolasku jatkuvia) ei ole [R3:1.21]), mutta jos Z on ääretönulotteinen, Z_w ei ole normeerautuva [R3:3.11] (ts. sen heikko topologia ei ole minkään normin määräämä). Huom.: vastaavasti Z^*:een voidaan määritellä heikko topologia Z^{**}:n avulla tai vielä heikompi "heikko*-topologia" Z:n avulla [R3:3.14]. Heikko topologia ja ei-normi-TVS:t ovat pääasiassa [R3]:n eikä tämän kurssin alaa.

[6] Oikeastaan vasta [R2: Exercise 6.6] todistaa, että tämä pätee kaikilla μ.

[7] Vastaavasti $L^p(\mathbb{R})$:ssä voitaisiin määritellä $f_j := \chi_{[j,j+1]}$ (ja $L^p(T)$:ssä $f_j(x) := e^{ijx}$ [R2:5.15]). Jos (muistaakseni myös vain jos, ks. [R3]) $L^p(\mu)$ on äärellisulotteinen (esim. $X = \{1\} \wedge \mu(X) = 1 \implies X \cong \mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$), niin vahva ja heikko topologia yhtyvät [R3:1.21].

[8] (Huom.: (ii)-kohdan esimerkissä $\|0\|_Z = 0 < 1 = \liminf_j \|e_j\|$.)

Vastaus: Hölderin epäyhtälö kertoo, että $\geq$, joten todistetaan vain että $\leq$. (Huom.: peräti sup = max ja väite pätee kaikille mitta-avaruuksille, jos $p < \infty$, kuten alta käy ilmi.)

1^o Olkoon $f \geq 0$ ja $1 < p < \infty$. On helppo arvata, että hyvä valinta on $g = cf^{p-1}$, jotta $\int fg = c\int f^p = c\|f\|_p^p$. $p^{-1} + q^{-1} = 1 \implies q = p/(p-1)$.

Vaaditaan $\|g\|_q = 1$. Nyt $\|f^{p-1}\|_q^q = \int_X (f^{p-1})^{p/(p-1)} = \|f\|_p^p$, joten $c := \|f^{p-1}\|_q^{-1} = (\|f^{p-1}\|_q^q)^{-1/q} = (\|f\|_p^p)^{-1/q} = \|f\|_p^{-(p-1)}$. Siis $\int fg = c\int f^p = c\|f\|_p^p = \|f\|_p$, QED.

2^o Ai niin, valitse g funktiolle $|f| \geq 0$, jolloin $\int |fg| = \int |f|g = \|(|f|)\|_p = \|f\|_p$. Jos sitten onkin $p = 1$, ota $g \equiv 1 \in L^\infty$ (nolla missä $f = 0$). Jos $p = \infty$, niin vasta nyt tarvitaan σ-äärellisyyttä: olkoon $X = \cup_n X_n$, missä $\mu(X_n) < \infty\ \forall n$; olkoon $\|f\|_\infty > M > 0$, jolloin $\mu(E) > 0$, missä $E := \{|f| > M\}$. Nyt $\mu(E) = \mu(\cup_n(E \cap X_n)) = \lim_N \mu(\cup_{n=1}^N (E \cap X_n))$ [R2: 1.19d], joten $0 < \mu(E_N)$ jollain $E_N := \cup_{n=1}^N (E \cap X_n)$. Niinpä $g := c\chi_{E_N}$ kelpaa, kun $c := \mu(E_N)^{-1}$ (koska $\mu(E_N) < \infty$), koska $\int_X fg = c\int_{E_N} |f| \geq cM\mu(E_N) = M$, siis sup $= \infty$.

Kommentteja: Huom.: tätä tulosta (ja joitain sen ao. variantteja) käytetään matemaattisessa kirjallisuudessa paljon ilman eri mainintaa. Huom.: kaava pätee myös kun $\|f\|_{L^p(\mu)} = \infty$ (ks. tehtävä 8.3 vuodelta 1994); tosin tällöin tehtävän oletukset ovat tarpeen.

Jos sup (ei max) kelpaa, voidaan lisäksi vaatia, että g on yksinkertainen funktio ja nolla jonkin äärellismitallisen joukon ulkopuolella. Jos X on avoin $\mathbb{R}^k$:n osajoukko (tms.) ja $\mu = m$, (tms.) niin kaava pätee kaikille L^1_{loc}-funktioille (etenkin kaikille L^p-funktioille) vaikka vaadittaisiin, että $g \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$; (tässäkin funktiot saavat olla Banach- tai jopa Fréchet-arvoisia). Tarvitessasi voit pyytää tämän (tai muun joissain laskareissa viitatun) lauseen minulta (km@iki.fi) [TID2] (tai [TID:1.15.16]).