Mat-1.150 Reaalianalyysi harjoitus 1 vastauksineen ma 25.1.1999 (2 sivua)

Laskuharjoitukset pidetään maanantaisin (25.1.99 alkaen) klo 12–14 salissa U356. Kysymykset (yleensä ed. ma), vastaukset (yleensä ma) ja oheismateriaalia saa huoneen U331 ilmoitustaululla olevasta kirjekuoresta. Vanhempi materiaali säilytetään kurssin riippukansiossa Optimin huoneessa (josta voi ottaa myös K97- ja S94-ReA-tehtäviä (osin samat), jos haluaa lisää laskettavaa). Niitä voi ottaa vapaasti; jos ne ovat lopussa, ilmoita assistentille (kalle.mikkola@hut.fi).

Tehtävistä tai muista asioista voi esittää kysymyksiä assistentille sähköpostitse (kalle.mikkola@hut.fi) tai livenä (U331) (tai laskuharjoituksissa).

Useiden tehtävien perään on hakasulkuihin merkitty kohta, johon asti kirjaa kannattaa vähintään lukea ennen ko. tehtävän tekemistä. Tätä seuraavat kommentit nopeudesta ja erityisesti helppoudesta ovat tietysti subjektiivisia. Kaikkia tehtäviä kannattaa yrittää. Tätä kurssia on tavallistakin vaikeampi sisäistää laskematta paljon itse.

Numeroituva tarkoittaa tässä kurssissa samaa kuin "enintään numeroituva" eli joukkoa, josta on olemassa injektio joukkoon $\mathbb{N}$. $B_r(x) := \{y \mid d(x,y) < r\}$ $(r > 0)$ on (metriikan d määräämä) x-keskinen r-säteinen (avoin) pallo [R2:1.4]. Pallo-sanan merkitys vaihtelee kirjasta toiseen; yo. merkintä on jossain määrin vakiintunut. Kaavoja edeltävät kvanttorijonot luetaan vasemmalta oikealle, esim. $\forall x \in V\ \exists r > 0\ (B_r(x) \subset V)$ (tavallisin avoimen joukon määritelmä metrisessä avaruudessa) tarkoittaa "kaikilla $x \in V$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B_r(x) \subset V$" eli r saa riippua x:stä toisin kuin kaavassa $\exists r > 0\ \forall x \in V\ (B_r(x) \subset V)$ (jonka $\mathbb{R}^n$:ssä toteuttavat vain $\emptyset$ ja $\mathbb{R}^n$).

Tehtävä 1.1 ([1.3] *helppo, nopeahko,tärkeä*):
Olkoon

$$X = \{a, b, c, d\} \text{ ja } \mathcal{T} = \{\emptyset,\ X,\ \{a\},\ \{a,b\},\ \{a,b,c\}\}.$$

(a) Onko $\mathcal{T}$ on X:n topologia? (b) Onko $\mathcal{T}$ σ-algebra? (c) Jos b-kohdan vastaus on ei, mikä on pienin σ-algebra $\mathfrak{M}$, joka sisältää $\mathcal{T}$:n? (d) Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ funktio $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$. Onko f jatkuva, kun $\mathbb{R}$ varustetaan tavanomaisella topologiallaan? (e) Onko f mitallinen $\mathfrak{M}$:n suhteen? (Ts. onko f Borel-mitallinen?)

Vastaus: (a) On, ts. määritelmän [R2:1.2] ehdot toteutuvat:
(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. (ii) Jos $V_1, ..., V_n \subset \mathcal{T}$, niin $V_1 \cap ... \cap V_n$ on selvästi (inkluusion suhteen) pienin joukoista V_i, joka on siis $\mathcal{T}$:n jäsen (tämän kohdan helppous johtuu siis siitä, että $\mathcal{T}$:n alkiot sattuvat olemaan sisäkkäisiä). (iii) Jos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \mathcal{T}$, niin $\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ on suurin joukoista V_α, joka siis on $\mathcal{T}$:n jäsen.

(b) Ei. $\{a\} \in \mathcal{T} \wedge \{a\}^c = \{b, c, d\} \notin \mathcal{T}$, joten $\mathcal{T}$ ei ole σ-algebra.

(c) $\{b\} = \{a, b\} \setminus \{a\} \in \mathfrak{M}$ [R2:1.6], $\{c\} = \{a, b, c\} \setminus \{a, b\} \in \mathfrak{M}$ ja $\{d\} = \{a, b, c\}^c \in \mathfrak{M}$. Koska kaikki X:n osajoukot ovat näiden äärellisiä yhdisteitä, $\mathcal{P}(X) \subset \mathfrak{M}$ (ts. kaikki X:n osajoukot ovat mitallisia ($\mathfrak{M}$:n suhteen, siis Borel-mitallisia)). Toisaalta aina $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$, joten $\mathcal{P}(X) = \mathfrak{M}$. ($\mathfrak{M}$ on σ-algebra [R2:1.10]:n perusteella; tosin ehdot [1.3] olisi helppo tarkastaa suoraankin.)[1]
(d) Ei [1.2c]. $f^{-1}]3, 5[:= \{x \in X \mid f(x) \in]3, 5[\} = \{d\} \notin \mathcal{T}$, siis erään avoimen joukon alkukuva ei ole avoin.

(e) Kyllä [1.3c]. Kaikkien joukkojen $A \subset \mathbb{R}$ alkukuvat ovat X:n osajoukkoja, siis $\mathfrak{M}$:n alkioita; erityisesti avointen joukkojen alkukuvat ovat $\mathfrak{M}$:n alkioita.[2]

Tehtävä 1.2 ([1.3] *nopeahko, tärkeähkö*):
Onko seuraava väite tosi: *Funktio on f jatkuva joss*[3] *jokaisen suljetun joukon F alkukuva $f^{-1}F$ on suljettu.*

Vastaus: Olkoon tutkittava funktio $f : X \to Y$. $G \subset_{\circ} X$ tarkoittakoon, että $G \in \mathcal{T}_X$ (G on avoin X:ssä) ja $F \subset_{c} X$ tarkoittakoon, että $F^c \in \mathcal{T}_X$ (F on suljettu X:ssä).[4] Funktio $f : X \to Y$ on jatkuva ($f \in \mathcal{C}(X, Y)$) joss $\forall G \in \mathcal{T}_Y$ $(f^{-1}G \in \mathcal{T}_X)$ [1.2].
Ratkaisussa käytetään kaavaa (joka sinun kannattaa muistaa ulkoa):

$$f^{-1}[A^c] = (f^{-1}A)^c,$$

joka todistetaan laskulla $x \in f^{-1}[A^c] := \{x \mid f(x) \in A^c\} \iff f(x) \in A^c \iff \neg[f(x) \in A] \iff \neg[x \in f^{-1}A] \iff x \in (f^{-1}A)^c$.
Varsinainen vastaus: Oikein: 1° "$\Longrightarrow$" Jos $F \subset_{c} Y$ eli $G := F^c \subset_{\circ} Y$, niin $f^{-1}(F) = f^{-1}(G^c) = (f^{-1}G)^c \subset_{c} X$ (koska $f^{-1}G \subset_{\circ} X$).
2° "$\Longleftarrow$" Jos $\forall F \subset_{c} Y$ $(f^{-1}F \subset_{c} X)$ ja $G \subset_{\circ} Y$, niin $G^c \subset_{c} Y$ ja siis $(f^{-1}G)^c = f^{-1}(G^c) \subset_{c} X$, joten $f^{-1}G \subset_{\circ} X$.

Tehtävä 1.3 ([1.11] *triviaali*):
Osoita, että väli $[a, b[\subset \mathbb{R}$ on Borel-joukko, kun $a < b$. (Tässä tietysti $\mathbb{R}$ ajatellaan varustetuksi tavanomaisella topologiallaan; tälläisiä selvinä pidettyjä asioita ei jatkossa aina mainita.)

Vastaus: $[a, b[=]-\infty, b[\setminus]-\infty, a[\in \mathfrak{M}_{\text{Borel}}$ [1.6d], koska $\mathcal{T} \subset \mathfrak{M}_{\text{Borel}}$, koska Borel-joukot ovat pienimmän $\mathcal{T}$:n sisältävän σ-algebran joukot.

Tehtävä 1.4 ([1.3] *kiva, vaikea, ei tärkeä*):

[1]Huom.: $\mathfrak{M}$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ Borel-σ-algebra [1.11].
[2]Koska $\mathfrak{M}$ on X:n Borel-σ-algebra (ks. (c)-kohta), sen suhteen mitallisia funktioita sanotaan Borel-mitallisiksi [1.11].
[3]joss:="jos ja vain jos"=iff
[4]Suljettu joukkohan tarkoittaa (määritelmän [R2:1.11] perusteella) avoimen joukon komplementtia, siis $F \subset_{c} X \iff F^c \subset_{\circ} X$.

[R2:Exe1.1] Onko olemassa ääretön σ-algebra, jossa on vain numeroituva määrä alkioita? (Siis onko olemassa joukkoa X ja ehdot [1.3] täyttävää joukkoa $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ s.e. $\mathfrak{M}$:ssä, on numeroituvasti ääretön määrä alkioita (eli mitallisia joukkoja).)[5]

Vastaus: Olkoon $\mathfrak{M}$ enintään numeroituva. Todistetaan, että se on äärellinen (huom.: X ei välttämättä ole, esim. $X = \mathbb{R} \wedge \mathfrak{M} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$).

Intuitiivinen ratkaisu: Siis X:ssä voi olla vain numeroituvasti ääretön määrä alkioita, tai jos on enemmän, $\mathfrak{M}$ ei ainakaan näe niitä, ts. ne ovat $\mathfrak{M}$:n kannalta enintään numeroituva määrä klimppejä (eivätkä yksinään $\mathfrak{M}$:ään kuuluvia alkioita). Tutkitaan siis vain näitä klimppejä (ekvivalenssiluokkia) ja todetaan, että niiden yhdisteet (koska niitä on enintään numeroituva määrä) ja vain niiden yhdisteet ovat $\mathfrak{M}$:n alkioita, niinpä klimppejä voi olla vain äärellinen määrä (koska $2^{\mathbb{N}}$ on ylinumeroituva), mistä seuraa että niiden yhdisteitäkin on vain äärellinen määrä, "QED".

Todistus: Selvästi $a \sim b \iff \forall A \in \mathfrak{M}\ [a \in A \iff b \in A]$ määrittelee ekvivalenssirelaation[6].

$1°$ $[a] \in \mathfrak{M}\ \forall a \in X$ **eli kukin ekvivalenssiluokka on mitallinen joukko.** Tod.: $E_a := \cap\{A \in \mathfrak{M} \,|\, a \in A\} \in \mathfrak{M}$ [1.6c], koska E_a on mitallisten joukkojen enintään numeroituva (jos kerran $\mathfrak{M}$:ssä on enintään numeroituva määrä alkioita A) leikkaus. Selvästi[7] $E_a = [a]$, QED.

$2°$ **Ekvivalenssiluokkien perhe** $\mathcal{E} := \{[a] \,|\, a \in X\}$ **on äärellinen.** Tod.: $M := \{\cup Q \,|\, Q \subset E\}$ (ekvivalenssiluokkien yhdisteiden perhe). Koska $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$ [1°], niin $\mathcal{E} \preceq \mathbb{N}$ (enintään numeroituva). Niinpä $M \subset \mathfrak{M}$ [1.3(iii)]. Toisaalta $Q, Q' \subset \mathcal{P}(\mathcal{E}) \implies \cup Q \neq \cup Q'$ (koska $[a] \in Q \setminus Q' \implies a \in \cup Q \setminus \cup Q'$), joten $M \approx \mathcal{P}(\mathcal{E})$, joten $|\mathcal{E}| < \infty$, koska muutoin olisi $\mathfrak{M} \succeq M \approx \mathcal{P}(\mathcal{E}) \succeq 2^{\mathbb{N}} \succ \mathbb{N}$.

$3°$ $\mathfrak{M} = M \approx \mathcal{P}(\mathcal{E}) < \infty$. Tod.: Jos $A \in \mathfrak{M}$ ja $a \in A$, niin $[a] \subset A$, joten $A = \cup_{a \in A}[a] \in M$, siis $\mathfrak{M} = M$, mistä väite, QED.[8]

Tehtävä 1.5 ([1.4] *helpohko, lyhyehkö*):

$\mathbb{R}^k$:n tavanomainen topologia määritellään sanomalla, että $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss V on avointen pallojen ($B_r(x_0) := \{x \subset \mathbb{R}^k \,|\, |x - x_0| < r\}$) (mielivaltainen) yhdiste (ts. $V = \cup_{\alpha \subset \mathcal{A}} B_{r_\alpha}(x_\alpha)$).

Olkoon $\mathcal{T}$ *suljettujen* aitojen ($r > 0$) pallojen ($C_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^k \,|\, |x - x_0| \leq r\}$, $r > 0$) (enintään) numeroituvien yhdisteiden perhe. (a) Onko $\mathcal{T}$ topologia? (b) Entä jos sallitaan $r \in \mathbb{R}$.

Vastaus: (a) Ei. $\{x\} = C_1(x + e) \cap C_1(x - e)$ (kun e on mikä tahansa yksikkövektori) on kahden avoimen joukon leikkaus, mutta $\{x\}$ ei ole suljettujen aitojen pallojen numeroituva yhdiste (koska kaikkiin aitoihin palloihin kuuluu muutakin), siis se ei ole $\mathcal{T}$:n alkio.

(b) Ei. (iii) $\{x\} = C_0(x) \in \mathcal{T}\ \forall x$, joten näiden mielivaltainen yhdisteen $V := \mathbb{R}^k \setminus \mathbb{Q}^k = \cup_{x \in \mathbb{R}^k \setminus \mathbb{Q}^k} C_0(x)$ pitäisi olla avoin [1.2a(iii)]. Silti $V = \cup_{n=1}^{\infty} C_{r_n}(x_n) \implies r_n \leq 0\ \forall n$[9] $\implies V \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \implies V \neq \mathbb{R}^k \setminus \mathbb{Q}^k$ (koska $\mathbb{R}^k \setminus \mathbb{Q}^k$ on ylinumeroituva), joten $\mathbb{R}^k \setminus \mathbb{Q}^k$ ei ole avoin, siis [1.2a(iii)] ei toteudu.

Lisätietoja

Huom.: kuten syksyn 1994 ReA:n laskuharjoituksessa 1.2 todistetaan, kukin seuraavista ehdoista määrittelee täsmälleen saman topologian, nimittäin $\mathbb{R}^k$:n tavanomaisen topologian:

(a) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss se on avointen pallojen numeroituva yhdiste.
(b) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss se on avointen k-ulotteisten kuutioiden ($C_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^k \,\big|\, |x_i - y_i| < r\ (i = 1, ..., k)\}$) numeroituva yhdiste.
(c) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss jokainen $x \in V$ kuuluu johonkin V:n sisältämään x-keskiseen avoimeen palloon (eli $\forall x \in V\ \exists r > 0\ (B_r(x) \subset V)$).
(d) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss se on avointen pallojen (mielivaltainen) yhdiste.
(e) Joukko $V \subset \mathbb{R}^1$ on avoin joss se on avointen välien numeroituva pistevieras yhdiste (ts. $V = \dot\cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, missä jokainen I_n on avoin väli (ja $n \neq m \Rightarrow I_n \cap I_m = \emptyset$)).

Näitä tietoja et tarvinne tällä kurssilla, ehkä myöhemmin.

---

[5] Numeroituvuusasioita et tällä kurssilla juuri tarvitse, kunhan muistat että numeroituvasti ääretön tarkoittaa yhtä mahtavaa kuin $\mathbb{N}$ (eli $E \approx \mathbb{N}$) ja kaikki muut äärettömät joukot ovat vielä mahtavampia. $E \approx F$ joss on olemassa bijektio $f : E \to F$. $E \preceq F$ (enintään yhtä mahtava) joss on olemassa injektio $f : E \to F$. Huom.: $E \prec 2^E := \mathcal{P}(E)$ aina kun E on joukko (tod.: Olkoon $f : E \to 2^E$ surjektio $A := \{x \in A \,\big|\, x \notin f(x)$, valitaan $a \in A$ s.e. $f(a) = A$ (mahdollista, koska f on surjektio). Ristiriita: jos $a \in f(a) = A$, niin $a \notin A$ (A:n määritelmän perusteella) ja jos $a \notin f(a) = A$, niin $a \in A$ — siis $\nexists$ surjektio $f : A \to 2^A$, QED).

[6] $a \sim a$, $a \sim b \implies b \sim a$, $a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c$; todistetaan malliksi viimeinen: Oletetaan $a \sim b \wedge b \sim c$. Olkoon $A \in \mathfrak{M}$ mielivaltainen. Jos $a \in A$, niin $b \in A$, siis $c \in A$. Jos $a \notin A$, niin $b \notin A$, siis $c \notin A$. Siis $a \in A \iff c \in A$. Koska $A \in \mathfrak{M}$ oli mielivaltainen, $a \sim c$, QED.

[7] $[a] \subset E_a$: $a \sim b \implies b \in E_a$. Olkoon sitten $b \in E_a$. Tällöin $a \in A \implies b \in A$, ja toisaalta $b \in A \implies b \notin A^c \implies a \notin A^c \implies a \in A$, joten $a \sim b$.

[8] Toinen tapa todistaa tämä tehtävä olisi olettaa bijektio $f : \mathbb{N} \to \mathfrak{M}$ ja käyttää diagonaaliargumentin tapaista päättelyä.

[9] Koska jokainen joukko muotoa $C_r(x)$, $r > 0$ sisältää jonkin $\mathbb{Q}^k$:n pisteen, sillä $x = (x_1, ..., x_k) \wedge |q_k - x_k| < r/k \implies |q - x|^2 = \sum_j |q_k - x_k|^2 < kr^2/k^2 \leq r^2$.