Teknillinen korkeakoulu Kinnunen / Mikkola

Mat-1.150 Reaalianalyysi
Välikoe 2, 28.4.1997 klo 12–15 U325 alustavat mallivastaukset

Tehtävät kannattaa tehdä alkaen helpoimmasta/nopeimmasta.

Saat käyttää Rudinin kirjan lauseita hyväksesi, kunhan kerrot lauseiden sisällön (etenkin oletukset). Jos kuitenkin tehtävässä on todistettava tulos, joka on suurin piirtein jokin kirjan lause (tai sen osa), et tietenkään saa soveltaa juuri sitä lausetta (todistamatta).

Tehtävä 1. Selosta lyhyesti Lebesgue–Radon–Nikodymin lauseen sisältö (lausetta ei tarvitse todistaa). Määrittele huolellisesti lauseessa esiintyvät kompleksisiin mittoihin liittyvät käsitteet.

Vastaus:[R2:6.10] Olkoon $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ positiivinen, σ-äärellinen mitta-avaruus ja olkoon λ kompleksinen mitta $\mathfrak{M}$:llä.
(a) On olemassa yksikäsitteiset kompleksiset mitat λ_a, λ_s $\mathfrak{M}$:llä s.e. $\lambda = \lambda_a + \lambda_s \wedge \lambda_a << \mu \wedge \lambda_s \perp \mu$. Jos λ on positiivinen, niin myös λ_a ja λ_s ovat.
(b) On olemassa yksikäsitteinen $h \in L^1(\mu)$ s.e. $\lambda_a(E) = \int_E h\, d\mu \ \forall E \in \mathfrak{M}$. (4 p.)

$\lambda_a << \mu$ tarkoittaa, että $\forall E \in \mathfrak{M}\ [\mu(E) = 0 \implies \lambda_a(E) = 0]$. (1 p.)
$\lambda_s \perp \mu$ tarkoittaa, että on olemassa $A, B \in \mathfrak{M}$ s.e. $A \cap B = \emptyset$, λ_s on keskittynyt A:lle ja μ on keskittynyt B:lle. (1 p.)

Kommentteja: Helppo (luennoilla vihjattu tärkeäksi), pistejakauma 0445566666666666. σ-äärellisyyttä päätin juuri ja juuri olla vaatimatta, en myöskään vaatinut virkettä "Jos λ on pos. - -", mutta yksikäsitteisyydet piti mainita. $h \in L^1$ on siis yksikäsitteinen muttei $h \in \mathcal{L}^1$, koska mikä tahansa ekvivalenssiluokan alkio kelpaa.

Tehtävä 2. Oletetaan, että $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva ja että $f' \in L^p(]a, b[)$ jollakin $p \in]1, \infty[$. Todista, että on olemassa vakio $c \geq 0$ s.e.

$$a \leq x \leq y \leq b \implies |f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Vastaus:$q := (1 - 1/p)^{-1}$. Koska absoluuttisesti jatkuvat funktiot ovat derivaattojensa integraaleja,

$$|f(y) - f(x)| = |\int_x^y f'\, dm| \leq \int_x^y |f'| \cdot 1\, dm \quad (2\ p.)$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f'\|_{L^p([x,y])} \|1\|_{L^q([x,y])} \leq \|f'\|_p |y - x|^{1/q}, \text{ QED.}$$

Kommentteja: Helpohko, pistejakauma 0222266666666666. En vaatinut Hölderin selitystä (rajatapaus, "yleistietoa").

Tehtävä 3. (a) Todista, että funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ Hardyn–Littlewoodin maksimaalifunktio

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

on Lebesgue-mitallinen (esim. todistamalla, että se on alhaalta puolijatkuva).
(b) Todista myös, että Mf kuuluu heikkoon $L^1(\mathbb{R}^n)$:ään kaikilla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Vastaus:(a) [R2:7.2]. (3 p.) (b) kuten [R2:7.4] (saa käyttää [R2:7.3]:a). (3 p.)

Kommentteja: Huom.: Tehtävien 3 ja 4 vastaukset eivät ole mallivastauksia vaan ohjeita.
(b) Vain heikon L^1:n määritelmä $\implies$ 1 p. Jos lausetta [R2:7.4] oli käytetty todistamatta ja heikon L^1:n määritelmä oli osattu, annoin 2 p.

Tehtävä 4. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue-mitallinen ja $0 < p < \infty$. todista, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\, dm = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > \lambda\})\, d\lambda$$

(käyttämättä kirjan jakaumafunktioita (*distribution functions*) koskevaa lausetta (ellet todista sitä)).

Vastaus:Tapa 1: Kyseessä on kirjan lauseen [8.16] erikoistapaus, sama (Fubinin lauseeseen perustuva) todistus siis kelpaa.

Kommentteja: Vaikeahko, mutta hyvin muistettu, pistejakauma 0000000024444555. Huom.: Fubinin lause [R2:8.8] (erittäin tärkeä!) vaatii integrandin (tulo)mitallisuutta (ts. mitan $\mu \times \lambda$ suhteen), mitä kukaan ei ollut nyt todistanut (muutama yritti). Lisäksi integrandin g on oltava $[0, \infty]$-arvoinen (kuten nyt) *tai* vaihtoehtoisesti on oltava $g \in L^1(\mu \times \lambda)$ (yleensä tutkitaan ensin $[0, \infty]$-arvoinen $|g|$). Huom.: g^x:n ja g_y:n mitallisuudesta ei seuraa g:n mitallisuus (eikä Fubinin päteminen) [R2:8.9c]. Arvostelu: muuten OK, mutta tulomitallisuutta ei ollut todistettu: 4 p., jos kuitenkin oli *selvästi* ymmärretty, että se pitäisi todistaa (kukaan ei osannut, idea selostettu [R2:8.16]:n todistuksessa: kyseessä on kahden (tulo)mitallisen tulo, koska χ_E on (tulo)mitallinen, koska E on, mikä on yksinkertaisille f triviaalia ja muille saadaan [R2:1.17]:n avulla), niin annoin 5 p.

Tapa 2: (tiivistelmä) (kukaan ei käyttänyt, vaikka näinhän lauseet yleensä tod.):
1^o $f = \alpha\chi_E$, $E \in \mathfrak{M}$... (helppo)
2^o f on yksinkertainen funktio... (helpohko edellisen avulla)
3^o Olkoon f mitallinen. Valitaan jono yksinkertaisia funktioita s.e. $0 \leq s_n(t) \to |f(t)|$ monotonisesti $\forall t \in \mathbb{R}^n$...[1]

[1] Jono saadaan lauseesta [1.17]. Tällöin molemmat integraalit $|f|$ korvattuna s_n:llä suppenevat monotonisen konvergenssin perusteella (myös oikean puolen integrandi suppenee monotonisesti $\forall\lambda$, mikä on melko helppo todistaa). Huom.: integraalit voivat tietenkin olla äärettömiä.