Mat-1.150 Reaalianalyysi
Välikoe 1, 12.3.1997: kysymykset ja mallivastaukset
(Huom.: 2. vk. ma 28.4. klo 12–15 U325:ssä.)

Tehtävä 1. Määrittele käsitteet (a) σ-algebra, (b) mitallinen funktio, (c) topologia.

Vastaus: Ks. [R2:Def1.3& Def1.2]. **Kommentteja:** (Huom.: $\mathfrak{M}, \mathcal{T} \subset 2^X = \mathcal{P}(X)$, ei $\mathfrak{M}, \mathcal{T} \subset X$. Tästä en kuitenkaan sakottanut, koska en sakottanut sen puutteestakaan. Melkein kaikki osasivat nämä. Huom.: ylinumeroituvat mitallisten joukkojen yhdisteet eivät ole välttämättä mitallisia, muutoinhan jokainen $E \subset \mathbb{R}$ olisi Lebesgue-mitallinen (koska suljetut joukot $\{r\}$ ovat mitallisia).)

Tehtävä 2. Olkoon μ X:n positiivinen mitta, $1 \le p < \infty$ ja $L^p(\mu) := \{f \mid f : X \to \mathbb{C}$ on mitallinen ja $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}$. Osoita, että $L^p(\mu)$ on täydellinen metriikan $d(f,g) := [\int_X |f-g|^p \, d\mu]^{1/p}$ suhteen.

Vastaus: Ks. [R2:3.11].

Kommentteja: Tässä on siis todistettava, että normin $\|\cdot\|_p$ määräämä metriikka on täydellinen, eli että jos $\{f_n\}$ on Cauchy-jono ko. metriikan suhteen, se suppenee johonkin L^p:n pisteeseen ko. metriikan suhteen, ts. $\exists f \in L^p$ s.e. $d(f_n, f) \to 0$. (Tästä sai ensimmäisen pisteen.) Vaikea tehtävä, ellei muista ideaa. Ideana oli poimia osajono $\{f_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}_+}$, s.e. $n_1 < n_2 < \ldots$ ja $\|f_{n_i} - f_{n_{i+1}}\|_p < 2^{-i}$ (valitaan esim. $n_i \ge N_{\epsilon_i := 2^{-i}}$) (pisteittäin tällaista ehtoa ei voida asettaa, koska $\{f_n(x)\}$ ei välttämättä ole Cauchy-jono millään x; näin toimineet saattoivat silti saada yht. 2 p., jos muutoin olivat osanneet hyvin (mukl. täydellisyyden määritelmän)). Huom. näin luotu osajono suppenee pisteittäin m.k., alkuperäinen jono ei yleensä.

Tehtävä 3. Olkoon $X \ne \emptyset$ kompakti ja $f : X \to \mathbb{R}$ ylhäältä puolijatkuva. Osoita, että f saavuttaa maksiminsa X:n jossakin pisteessä.

Vastaus:"f on ylhäältä puolijatkuva" tarkoittaa, että $V_r := \{x \in X \mid f(x) < r\}$ on avoin $\forall r \in \mathbb{R}$ (1 p.). Nyt $X \subset \cup_{r \in \mathbb{R}} V_r$, koska $x \in V_{f(x)+1}$ $\forall x$. X:n kompaktisuuden perusteella sen avoimella peitteellä $\{V_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ on äärellinen osapeite $V_{r_1}, \ldots, V_{r_n}$, ts. $X \subset V_{r_1} \cup \ldots \cup V_{r_n}$. Olkoon $r := \max_{k=1,\ldots,n} r_k$. Tällöin $V_{r_1} \cup \ldots \cup V_{r_n} = V_r$, joten $f(x) < r$ $\forall x \in X$. Siis $\beta := \sup f \le r < \infty$ (2 p.).

$W_r := \{x \in X \mid f(x) < \beta - r\} \in \mathcal{T}$. Jos olisi $\nexists x_0 \in X$ $[f(x_0) = \beta]$, niin olisi $f(x) < \beta$ $\forall x \in X$ eli $X \subset \cup_{r>0} W_r$, jolloin olisi $X \subset W_{r_1} \cup \ldots \cup W_{r_k}$ joillain $k \in \mathbb{N}_+$, $r_1, \ldots, r_k > 0$, joten $f(x) \le \beta - r < \beta$, missä $r := \min_{j \le k} r_j$, joten β ei olisikaan supremum, RR. Siis $\exists x_0 \in X$ $[f(x_0) = \beta := \sup f]$, joten $\beta = \max f$, QED (3 p.).

Tapa 2: Elegantein todistus oli Kenrick Binghamin: $V_x := \{y \in X \mid f(y) < f(x)\} \in \mathcal{T}_X$. Jos f:llä ei olisi maksimia, olisi $\forall y \in X$ $\exists x \in X$ $[f(y) < f(x)]$, eli $y \in V_x$, joten tällöin olisi $X \subset \cup_{x \in X} V_x$, ja kompaktisuuden perusteella $X \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n} = V_x$, missä x on suurimman $f(x_j)$ saavuttava x_j ($j = 1, \ldots, n$), siis olisi $x \in X \subset V_x$ eli $f(x) < f(x)$ eli ristiriita, QED.

Tapa 3: $\beta := \sup f \le \infty$. Jos olisi $X \subset \cup_{M<\beta} V_M$, niin $X \subset V_{M_1} \cup \ldots \cup V_{M_n}$, joten $f(x) < \max_{j \le n} M_n < \beta$ $\forall x$, mikä on ristiriita. Siis $f(x) = \beta$ jollain x, QED.[1]

Kommentteja: Pistejakauma: 66666633322110. Huom.: avoin joukko voi olla kompakti (esim. $\emptyset$ on aina, diskreetissä topologiassa kaikki joukot ovat avoimia ja äärelliset joukot ovat lisäksi kompakteja). Kompakti joukko ei välttämättä ole suljettu (ellei X ole Hausdorffin avaruus, joita melkein kaikki käytännössä vastaan tulevat avaruudet (mm. metriset) tosin ovat). Myöskään suljetun joukon kuva ei välttämättä ole suljettu (edes jatkuvalla funktiolla).

Tehtävä 4. Olkoon μ positiivinen mitta X:n σ-algebrassa $\mathfrak{M}$. Selosta lyhyesti, miten määritellään mitallisen funktion $f : X \to \mathbb{R}$ integraali mitan μ suhteen.

Vastaus: Ks. [R2:Def1.23&Def1.31].

Kommentteja: Siis ensin määritellään mitallisen, ei-negatiivisen yksinkertaisen funktion integraali, sitten sellaisten supremumeina funktioiden $g \ge 0$ integraalit (3 p.) ja lopulta $\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$, kun edes toinen näistä integraaleista on äärellinen (mm. kun $f \in L^1(\mu)$), missä $f^+ := \max(f, 0) \wedge f^- := \max(-f, 0)$. (Missään ei tarvita jonoa $s_n \to f-$; en aivan sakottanut sellaisen olemassaolon mainitsemisesta. Olisi hyvä mainita (ei tarvitse tod., kun löytyy kirjasta), että $f \in \mathcal{L} \implies f^+, f^- \in \mathcal{L}$, mutta en aivan tätäkään vaatinut.)

[1] Tästähän seuraa, että $\beta \in \mathbb{R}$, koska $f : X \to \mathbb{R}$.