Teknillinen korkeakoulu Londen / Mikkola

Mat-1.150 Reaalianalyysi
Tentti 18.8.1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1. Kerro, mitä Rieszin esityslause (koskien positiivisia funktionaaleja) sanoo. Ei todistusta.

Tehtävä 2. Olkoon $\mathcal{C}([0,1])$ jatkuvien funktioiden $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ Banach-avaruus (sup-normilla). Olkoon

$$M := \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \,\middle|\, \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt = 1 \right\}.$$

Osoita, että M on $\mathcal{C}([0,1])$:n suljettu ja konveksi osajoukko.

Tehtävä 3. Osoita, että jos $f \in M$ (M on kuten tehtävässä 2.) ja $\|f\| = r$, niin on olemassa sellainen $g \in M$, että $\|g\| < r$.

Tehtävä 4. Todista Lebesguen dominoidun suppenemisen lause käyttämällä Fatoun lemmaa.

Tehtävä 5. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R})$ sellainen, että $Mf \in L^1(\mathbb{R})$ (Mf on f:n maksimaalifunktio). Osoita, että $f = 0$ m.k.