Teknillinen korkeakoulu Londen / Mikkola

Mat-1.150 Reaalianalyysi
Tentti 26.5.1997

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1. Olkoon $0 < p < \infty$. Olkoon $f : X \to \mathbb{C}$ mitallinen ja $\int_X |f|^p < \infty$. Osoita, että jos $\epsilon > 0$, niin

$$\mu\left(\{x \mid |f(x)| \geq \epsilon\}\right) \leq \epsilon^{-p} \int_X |f|^p \, d\mu.$$

Tehtävä 2. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ on tasaisesti jatkuva ja $|f|^p$ on integroituva $\mathbb{R}^n$:n yli jollain p, jolla $0 < p < \infty$. Osoita, että $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Tehtävä 3. Olkoon $\delta_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_+ := \{1, 2, 3, ...\}$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 < \infty$. Olkoon $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ Hilbert-avaruuden H ortonormeerattu joukko ja

$$S = \{x \in H \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n, \ |c_n| \leq \delta_n \ \forall n \in \mathbb{N}_+\}.$$

Osoita, että S on kompakti.

Tehtävä 4. Olkoon $\mathfrak{M}$ joukon X σ-algebra. Olkoon μ $\mathfrak{M}$:n kompleksimitta. Määritellään

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_k)|,$$

missä sup otetaan yli E:n kaikkien numeroituvien mitallisten ositusten. Osoita, että $|\mu|$ on $\mathfrak{M}$:n positiivinen mitta.

Tehtävä 5. Olkoon $1 < p < \infty$ ja $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Osoita, että jos $f \in L^p(\mathbb{R})$, niin

$$||f||_{L^p} = \sup\{|\int fg \, dm| \mid g \in L^q, \ ||g||_{L^q} \leq 1\}.$$

Huom.: tehtävät ovat (laatijan mielestä) vaikeusjärjestyksessä.