Mat-1.150 Reaalianalyysi: 8. harj. vastauksineen ma 17.3.1997 (2 sivua)

Tiedote: Jos joku haluaa suorittaa kurssin välikokein ja ensimmäinen välikoe 12.3.97 jäi väliin, ottakoon yhteyttä luennoitsijaan lähiaikoina:
email: juha.kinnunen@helsinki.fi, puh.: 191 22875.

Välikokeen tulokset tullevat viikolla 12. **Valitustilaisuus** on ma 24.3. klo 13.15 huoneessa U327. Ne, joille aika on huono, voivat sopia muusta ajasta (kalle.mikkola@hut.fi).

Merkinnöistä: $\int_{\mathbb{R}} ax^2\,dx := \int_{\mathbb{R}} ax^2\,dm =: \int_{\mathbb{R}} ax^2\,dm(x)$ (ts. funktion $x \mapsto ax^2$ integraali Lebesguen mitan (m) suhteen), vast. $\int_X ax^2\,d\mu(x) := \int_X ax^2\,d\mu$ (saman funktion integraali mitan μ suhteen), mutta mitan perässä oleva (x)-merkintä kertoo integrointimuuttujan (joka esim. viimeisessä merkinnässä jäisi lukijan arvauksen varaan).

Kuudennen luvun teoriaa sovelletaan mm. todennäköisyyslaskennassa: siinä X on mahdollisten tapahtumien joukko, $\mathfrak{M} \subset 2^X$ ja positiivinen mitta μ kertoo kunkin $E \subset \mathfrak{M}$ todennäköisyyden ($\mu(X) = 1$). Esim. $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mu(n) = 1/6\ \forall n \in X$, $\mathfrak{M} = 2^X$ ja $\mu(E) := |E|/6$, jolloin $\mu(\{2,4,6\}) = 1/2$ kertoo, että todennäköisyydellä 1/2 nopasta tulee parillinen tulos. Satunnaismuuttuja $f(n) = n - 3\frac{1}{2}$ voisi olla pelaajan voitto markkoina (satunnaismuuttujat ovat mitallisia funktioita) ja $E[f] := \int_X f\,d\mu = 0$ sen odotusarvo, $\int_X |f - E[f]|^2$ varianssi jne. Tästä tarkemmin matemaattisen todennäköisyyslaskun kurssilla.

Tehtävä 8.1 ([6.1] *helppo,nopea*):
[R2:Exe6.1] Olkoon $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ mitta-avaruus ja

$$\lambda(E) := \sup \sum_i |\mu(E_i)|,$$

missä supremum otetaan kaikkien *äärellisten* E:n (mitallisten) ositusten yli.
Onko välttämättä $\lambda = |\mu|$?

Vastaus: Selvästi $0 \le \lambda \le |\mu|$. Olkoon sitten $E \in \mathfrak{M}$. Osoitetaan $M < |\mu|(E) \Rightarrow M < \lambda(E)$, mistä seuraa, että $\lambda(E) = |\mu|(E)$. Valitaan E:n (mitallinen) ositus $\{E_i\}$ s.e. $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| > M$ [6.1]. Valitaan n s.e. $\sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| > M$. Nyt osituksen $\{E_1, E_2, ..., E_n, E \setminus (E_1 \cup ... \cup E_n)\}$ mukaan $\lambda(E) > M$.

Tehtävä 8.2 ([6.4/6.10] *helpohko, lyhyehkö*):
Olkoon μ positiivinen mitta $(X, \mathfrak{M})$:ssä ja $f \in L^1(X, \mu; [-\infty, \infty])$. Määritellään $\nu(E) := \int_E f\,d\mu$. Osoita, että $|\nu|(E) = \int_E |f|\,d\mu$.

Vastaus:$\lambda_f(E) := \int_E |f|\,d\mu$ määrää positiivisen mitan $\lambda : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ [R2:1.29]. Vastaavasti ν on välttämättä kompleksinen[1] (nyt peräti reaalinen) mitta, mikä nähdään vaikka toteamalla se positiivisten rajoitettujen mittojen $\nu^+(E) := \int_E f^+\,d\mu$ ja $\nu^-(E) := \int_E f^-\,d\mu$ (jotka ovat mittoja [R2:1.29]:n perusteella) erotukseksi ($\nu = \int_E f\,d\mu = \int_{E\cap\{f>0\}} f^+\,d\mu + \int_{E\cap\{f\le 0\}} -f^-\,d\mu$).[2]

1^o $|\nu|(E) \le \lambda_f(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}$. <u>Tod.:</u> Selvästi $\lambda_f(X) = \|f\|_1 < \infty$.

$$\sum_j |\nu(E_j)| = \sum_j |\int_{E_j} f\,d\mu| \le \sum_j \int_{E_j} |f|\,d\mu$$

$$= \sum_j \int_X \chi_{E_j}|f|\,d\mu \overset{R2:1.27}{=} \int_X \sum_j \chi_{E_j}|f|\,d\mu = \int_X \chi_E|f|\,d\mu = \lambda_f(E),$$

kun $\{E_j\}$ on jokin E:n ositus. Niinpä $|\nu|(E) \le \lambda_f(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}$.

2^o $|\nu|(E) \ge \lambda_f(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}$. <u>Tod.:</u> $E^+ := \{x \in E \mid f(x) > 0\} = E \cap f^{-1}[\mathbb{R}_+] \in \mathfrak{M}$.

$$|\nu|(E) \ge |\nu(E^+)| + |\nu(E \setminus E^+)| := |\int_{E^+} f\,d\mu| + |\int_{E\setminus E^+} f\,d\mu| := \int_{E^+} f\,d\mu - \int_{E\setminus E^+} f\,d\mu$$

$$:= \int_{E^+} f\,d\mu + \int_{E\setminus E^+} (-f)\,d\mu := \int_{E^+} |f|\,d\mu + \int_{E\setminus E^+} |f|\,d\mu := \int_E |f|\,d\mu =: \lambda_f(E).$$

On tapana sanoa, että f on ν_f:n (ja $|f|$ on $|\nu_f|$:n) *Radonin–Nikodymin derivaatta* [R2:6.10].

Kommentteja: Väite pätee myös kompleksisille $f \in L^1(\mu)$: 1^o pätee sellaisenaan, 2^o voitaisiin hoitaa seuraavasti: Jos $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$, missä $A_j \in \mathfrak{M}$ ovat erillisiä,

$$|\nu_s|(E) \ge \sum_j |\nu_s(A_j \cap E)| = \sum_j |\int_{A_j\cap E} s\,d\mu| = \sum_j |a_j|\mu(A_j \cap E) = \int_E |s|\,d\mu =: \lambda_s(E),$$

joten tämän ja 1^o:n perusteella $|\nu_s| = \lambda_s\ \forall s \in \mathrm{SMF} \cap L^1$ ("Simple Measurable Functions"). Toisaalta 1^o todistaa, että kuvaus $T : L^1(\mu) \ni f \mapsto \nu_f \in M(\mathfrak{M})$, missä $M(\mathfrak{M})$ on $\mathfrak{M}$:llä määriteltyjen kompleksisten mittojen normiavaruus kokonaisvariaationormilla (selvästi normiavaruus), on paitsi (selvästi) lineaarinen myös jatkuva ($\|\nu\|_M := |\nu|(X) \le \|\lambda_f(X)\| = \|f\|_1$, ts. kuvauksen normi on enintään 1). Jos nyt $f \in L^1$, voidaan valita $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.e. $\mathrm{SMF} \ni s_n \underset{L^1(\mu)}{\to} f$ [R2:3.13], jolloin jatkuvuuden perusteella

$$|\nu_f|(E) = \lim_n |\nu_{s_n}|(E) = \lim_n \int_E |s_n|\,d\mu \overset{*}{=} \int_E |f|\,d\mu =: \lambda_f(E)\ \forall E \in \mathfrak{M}.$$

Kohta $*$ seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta, jos valitaan $s_n := \sum_{j=1}^n t_n$, missä funktiot t_n on valittu kuten kaavassa [R2:2.24(3)].[3]

[1] Huom.: jokainen kompleksinen mitta on rajoitettu [R2:6.4]; positiiviset mitathan voivat olla äärettömiäkin.

[2] Vastaavasti yleisen $f \in L^1(\mu)$ integraali nähdään mitaksi yo. tavalla ottamalla lisäksi $\mathrm{Re}\, f$ ja $\mathrm{Im}\, f$ erikseen.

[3] Huijausta; oikeastaan ne pitää valita erikseen $(\mathrm{Re}\, f)^+$:lle, $(\mathrm{Re}\, f)^-$:lle, $(\mathrm{Im}\, f)^+$:lle ja $(\mathrm{Im}\, f)^-$:lle ja laskea yhteen (siis $s_n := \sum_{j=1}^n (t_n - t_n' + it_n'' - it_n'''))$. Tällöin $s_n \to f$ dominoidun konvergenssin perusteella (majorantti $f \in L^1$) ja $*$-väite seuraa yhtä hyvin dominoidusta kuin monotonisesta konvergenssista.

Toinen tapa todistaa sama olisi todeta, että $L^1(\mu) \ni f \mapsto \int_E |f|\,d\mu \in \mathbb{C}$ on jatkuva, koska

$$|\int_E |f|\,d\mu - \int_E |g|\,d\mu| = |\int_E |f|-|g|\,d\mu| \le \int_E ||f|-|g||\,d\mu \le \int_E |f-g|\,d\mu \le \|f-g\|_1 < \epsilon,$$

kun $\|f-g\|_1 < \delta_\epsilon := \epsilon$ (ts. $d(f,g) < \delta$), ja todeta näin $\int_E |f|\,d\mu$ ja $|\nu_f|(E)$ samoiksi $\forall f \in L^1$, koska ne ovat samoja tiheässä osajoukossa SMF $\cap L^1$ ja jatkuvia koko L^1:ssä.

Tehtävä 8.3 ([6.4/6.10] *helppo, nopea*):
Olkoon $X = [0,1]$, m =Lebesguen mitta, $\mathfrak{M} = \mathcal{B}_X$ (X:n Borelin joukot). Määritellään $f_1(x) := 2\chi_{[0,1/2]}(x) - 1 \wedge f_2(x) = x \wedge f_3(x) = x - 1/2$. Määritellään $\mu_j := \int_E f_j\,dm$ ($j = 1,2,3$) $\forall E \in \mathfrak{M}$ (tehtävän 8.2 alussahan todettiin, että $f \in L^1(\mu) \implies E \mapsto \int_E f\,d\mu$ on kompleksinen mitta).
(a) Onko $E \in \mathfrak{M} \wedge \mu_1(E) = 0 \implies \mu_2(E) = 0$?
(b) Onko $E \in \mathfrak{M} \wedge \mu_1(E) = 0 \implies \mu_3(E) = 0$?

Vastaus:(a) $E := [0,1]$. $\mu_1(E) = \int_{[0,1]} f_1\,dm = \int_{[0,1/2]} 1\,dm + \int_{[1/2,1]} -1\,dm = 0$, mutta $\mu_2(E) = \int_{[0,1]} f_2\,dm = \int_{[0,1]} x\,dm = 1/2 \ne 0$, siis vastaus on ei.
(b) Ei. Olkoon $E = [0,1/4] \cup [1/2,3/4]$. Tällöin $\mu_1(E) = 1/4 - 1/4 = 0$, mutta

$$\mu_3(E) = \int_{[0,1/4]} (x - \frac{1}{2})\,dx + \int_{[1/2,3/4]} (x - \frac{1}{2})\,dx$$

$$= 1/32 - 1/8 + [(\frac{3}{4})^2 - (\frac{1}{2})^2]/2 - 1/8 = -1/16 \ne 0.$$

(Huom.: vaikka väitteet olisivat totta, ko. mitat eivät silti välttämättä olisi absoluuttisesti jatkuvia toistensa (kokonaisvariaatiomittojen) suhteen, se vaatisi vastaavan relaation mittojen kokonaisvariaatiomittojen suhteen.)

Tehtävä 8.4 ([6.7] *helppo, lyhyt*):
Olkoon $z_j \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ($j \in \mathbb{N}_+$) $\wedge \sum_{j=1}^\infty |z_j| < \infty$. Määritellään $\nu(E) := \sum_{z_j \in E} z_j\ \forall E \subset \mathbb{C}$.
(a) Todista, että ν on kompleksinen mitta.
(b) Onko ν absoluuttisesti jatkuva tai singulaarinen Lebesguen mitan m suhteen?

Vastaus:(b) TAPA 1: $\nu(E) = \int_E f\,d\sigma$, missä σ on lukumäärämitta (ja $\mathfrak{M} := 2^{\mathbb{C}}$)[4], kun määritellään $f(z_j) = z_j\ \forall j \in \mathbb{N}_+$ ja $f(z) = 0$ muilla $z \in \mathbb{C}$. Niinpä ν on kompleksinen mitta, koska tehtävässä 8.2 todettiin kaikkien $L^1(\sigma)$-funktioiden indusoivan näin mitan, ja $\|f\|_{L^1(\sigma)} = \int_{\mathbb{C}} |f|\,d\sigma = \sum_{j=1}^\infty |z_j| < \infty$.
TAPA 2: Olkoon $E = \uplus_{k\in\mathbb{N}} E_k \subset \mathbb{C}$. ν on kompleksinen mitta [R2:6.1], koska

$$\sum_k \nu(E_k) = \sum_k \sum_{z_j \in E_k} z_j = \sum_{\{j \,|\, \exists k\ [z_j \in E_k]\}} z_j = \sum_{z_j \in \cup_k E_k} z_j = \nu(\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k),$$

(b) $m(\{z_1\}) = 0 \ne z_1 = \nu(\{z_1\})$, joten ei ole $m(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$, ts. ei ole $\nu << m$.[5] Sen sijaan ν on keskittynyt joukkoon $A := \{z_j \,|\, j \in \mathbb{N}_+\}$, m on keskittynyt joukkon $B := A^c$ (koska A on nollamitallinen, koska numeroituva), ja $A \cap B = \emptyset$, joten $m \perp \nu$.[6]

Tehtävä 8.5 ([6.7] *helpohko, lyhyt*):
Olkoot μ, ν ja λ kompleksisia mittoja σ-algebrassa $\mathfrak{M}$, $\mu \perp \lambda$ ja $\nu \perp \lambda$.
Todista, että (a) $(\alpha\mu) \perp \lambda\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ ja (b) $\mu + \nu \perp \lambda$.

Vastaus: Oletusten perusteella on olemassa joukot $A, A', B, B' \in \mathfrak{M}$ s.e. μ on keskittynyt A:lle (ts. $\mu(E) = \mu(E \cap A)\ \forall E \in \mathfrak{M}$), λ B:lle ja $A \cap B = \emptyset$, sekä ν on keskittynyt A':lle, λ B':lle ja $A' \cap B' = \emptyset$.
(a) $(\alpha\mu)(E) := \alpha \cdot \mu(E) = \alpha \cdot \mu(E \cap A) =: (\alpha\mu)(E \cap A)\ \forall E \in \mathfrak{M}$, joten myös $\alpha\mu$ on keskittynyt A:lle. Koska $A \cap B = \emptyset$, on $\alpha\mu \perp \lambda$, QED.
(b) Erityisesti $\lambda(E) = \lambda(E \cap B')\ \forall E \in \mathfrak{M}$ ja $\lambda(E) = \lambda(E \cap B)\ \forall E \in \mathfrak{M}$. Niinpä $\lambda(E) = \lambda(E \cap B') = \lambda((E \cap B') \cap B) = \lambda(E \cap (B' \cap B))\ \forall E \in \mathfrak{M}$, joten λ on keskittynyt $B \cap B'$:lle. Toisaalta

$$(\mu+\nu)(E) := \mu(E) + \nu(E) = \mu(E \cap A) + \nu(E \cap A')$$

$$\overset{*}{=} \mu(E \cap (A \cup A')) + \nu(E \cap (A \cup A')) = (\mu+\nu)(E \cap (A \cup A')),$$

($*$): koska $\mu(E \cap (A' \setminus A)) = \mu((E \cap (A' \setminus A)) \cap A) = 0$, joten $\mu(E \cap (A \cup A')) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap (A' \setminus A)) = \mu(E \cap A)$ ja ν vast. Niinpä $(\mu+\nu)$ on keskittynyt joukkoon $A'' := A \cup A'$ ja λ joukkoon $B'' := B \cap B'$ ja $A'' \cap B'' = (A \cap B'') \cup (A' \cap B'') \subset (A \cap B) \cup (A' \cap B') = \emptyset$, joten $(\mu+\nu) \perp \lambda$, QED.

Vihjeitä: 8.1: Selvästi $\lambda \le |\mu|$. Todistaaksesi käänteisen oleta, että $|\mu|(E) > M$, ja todista, että $\lambda(E) > M$.
8.2: $E^+ := \{x \,|\, f(x) > 0\}$, $E^- := \{x \,|\, f(x) \le 0\}$, jolloin $|\nu|(E) \ge ... = \int_E |f|\,d\mu$. Toisaalta $|\nu|(E) \le ... = \int_E |f|\,d\mu$.
8.3: Katso kuvista eri joukkojen pinta-aloja. **8.4**: (a) Määritelmästä. (b) Määritelmästä.
8.5: (a) Määritelmästä (samat A ja B kelpaavat). (b) Määritelmästä (ota joukot A ja B pareille μ ja λ; joukot A' ja B' pareille ν ja λ; $A'' := A \cup A' \wedge B'' := B \cap B'$).

[4] Ellet ole vielä tehnyt tätä itsellesi selväksi, ajattele se ensin läpi yksinkertaisilla funktioilla, sitten positiivisilla.

[5] Tässä $m = m_{\mathbb{C}} \cong m_{\mathbb{R}^2}$.

[6] Huom.: joukko, johon m tai ν on keskittynyt, ei ole yksikäsitteinen. On olemassa pienin joukko (nimittäin A), johon ν on keskittynyt, muttei ole olemassa pienintä joukkoa, johon m on keskittynyt (jos sen sijaan μ on positiivinen ja λ kompleksinen tai positiivinen mitta, aina on olemassa μ-minimaalinen (ei välttämättä yksikäsitteinen) joukko B, jolle λ on keskittynyt (ht), esim. $B = A^c$ on $|\nu|$-minimaalinen (koska $|\nu|(B) = 0$) Huom.: $|\nu|(E) = \sum_{z_j \in E} |z_j|$ (ht. tai teht. 8.2).