Mat-1.150 Reaalianalyysi: 7. harj. vastauksineen ma 10.3.1997 (2 sivua) Kurssin **1. välikoe** (1/2) pidetään ke 12.3.97 klo 16–19 U325:ssä. Koealue on [R2:Ch1–3] poislukien kohdat 1.40, 1.41, 2.22 ja 2.23 sekä kohtien 1.36, 2.12, 2.13, 2.14, 2.24, 2.25 ja 3.17 todistukset. Siis välikokeeseen tulevat harjoitukset 1–5. (Luku 4 ja harjoitus 6 kuuluvat koealueeseen pienemmällä painolla.)

Tehtävä 7.1 ([5.4] *helpohko, lyhyt*):
(a) Näytä, että $A = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(0) = 1\}$ on suljettu ja konveksi joukko avaruudessa $\mathcal{C}([0,1])$, joka on tavanomaiseen tapaan[1] varustettu sup-normilla $\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
(b) Osoita, että A:ssa on äärettömän monta normin minimoivaa alkiota.

Vastaus:$\Lambda f := f(0)$. Selvästi Λ on lineaarinen (funktionaali). $\|\Lambda f\|_{\mathbb{C}} := |\Lambda f| := |f(0)| \le \sup|f| =: \|f\|_{\mathcal{C}}$, joten Λ on rajoitettu eli jatkuva [R2:5.4]. $A = \Lambda^{-1}[\{1\}]$ on suljettu, koska se on suljetun joukon alkukuva.[2]

A on konveksi [R2:Def4.8], koska jos $f, g \in A \wedge t \in]0,1[$, niin $\Lambda((1-t)f + tg) = (1-t)\Lambda f + t\Lambda g = (1-t)1 + t\cdot 1 = 1$ eli $((1-t)f + tg) \in A$.

(b) Jos $f \in A$, niin $f(0) = 1$, joten $\|f\|_{\mathcal{C}} \ge 1$. Siis jokainen $f \in A$, jolla $\|f\|_{\mathcal{C}} = 1$, on normin minimoiva. Näitä ovat mm. funktiot

$$f_r(t) := \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \le t \le r; \\ r - t, & \text{kun } r < t \le 1. \end{cases}$$

Kommentti: Tästä voidaan päätellä, ettei $\mathcal{C}([0,1])$ voi olla hilbertoituva, koska Hilbert-avaruuksissa (ja eräissä muissakin normiavaruuksissa) epätyhjässä suljetussa konveksissa joukossa on aina yksikäsitteinen minimoiva alkio [R2:4.10].

(a)-kohdassa määritelty Λ on itse asiassa samaistettavissa "δ-funktioon" ($\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*, \mathcal{C}(\mathbb{R})^*, \dots$ ja δ on Heavysiden funktion $\chi_{\mathbb{R}_+}$ derivaatta).

Tehtävä 7.2 ([5.4] *keskitasoa, keskipitkä*):
(a) Näytä, että $A = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(0) = 0 \wedge \int_0^1 f(x)\,dx = 1\}$ [3] on suljettu ja konveksi joukko sup-normilla varustetussa avaruudessa $\mathcal{C}([0,1])$. (b) Osoita, että A:ssa ei ole normin minimoivaa alkiota.

Vastaus: (a) $v : \mathcal{C} \ni f \mapsto \int_0^1 f\,dm \in \mathbb{C}$ on selvästi lineaarinen (funktionaali). Se on jatkuva [R2:5.4], koska

$$|v(f)| = |\int_0^1 f\,dm| \le \int_0^1 |f|\,dm \le \int_0^1 \|f\|_{\mathcal{C}}\,dm = \|f\|_{\mathcal{C}}.$$

$\Lambda f := f(0)$. Selvästi Λ on lineaarinen (funktionaali). $\|\Lambda f\|_{\mathbb{C}} := |\Lambda f| := |f(0)| \le \sup|f| =: \|f\|_{\mathcal{C}}$, joten Λ on rajoitettu eli jatkuva [R2:5.4]. $\Lambda^{-1}[\{1\}]$ on suljettu, koska se on suljetun joukon alkukuva. Samoin $v^{-1}[\{1\}]$ on suljettu, joten näiden leikkaus A on suljettu.

A on konveksi: Olkoon $f, g \in A \wedge t \in]0,1[\wedge h = (1-t)f + tg$. Lineaarisuuden perusteella $\Lambda h = (1-t)\Lambda f + t\Lambda g = 0$. $v(h) = \int[(1-t)f + tg] = (1-t)\int f + t\int g = (1-t)1 + t\cdot 1 = 1$. Niinpä $h \in A$.

(b)

$$a_r := (1 - r/2)^{-1}, \ f_r(t) = \begin{cases} a_r t/r, & \text{kun } 0 \le t < r; \\ a_r, & \text{kun } r \le t \le 1. \end{cases}$$

$f_r(0) = 0$ ja $\int_0^1 f_r = \int_0^r a_r t/r + \int_r^1 a_r = r\cdot a_r/2 + (1-r)a_r = a_r(1 - r/2) = 1$, joten $f_r \in A$ $\forall r \in]0,1[$. $\|f_r\|_{\mathcal{C}} = a_r \to 1+$, kun $r \to 0+$, joten $\inf_{f\in A}\|f\|_{\mathcal{C}} \le 1$ $(*)$.

Jos $f \in A$, niin välttämättä $\|f\|_{\mathcal{C}} \ge 1$, koska $1 = \int_0^1 f \le \int_0^1 \sup|f| = \sup|f| =: \|f\|_{\mathcal{C}}$. Siis $\inf_{f\in A}\|f\|_{\mathcal{C}} \ge 1$ $(**)$. $(*) \wedge (**) \implies \inf_{f\in A}\|f\|_{\mathcal{C}} = 1$. Toisaalta yhtäsuuruus yllä vaatisi, että $\int_0^1(\sup|f| - f) = 0$ eli $\sup|f(t)| - f(t) = 0$ m.k. t eli $\forall t$, koska f on jatkuva.[4] Siis tällöin olisi $f(t) = \sup|f(t)| =$vakio $\forall t \in [0,1]$, jolloin ei voisi olla $f \in A$. Siis ei ole alkiota $f \in A$, jolla $\|f\|_{\mathcal{C}} = 1 = \inf_{f\in A}\|f\|_{\mathcal{C}}$, QED.

Tehtävä 7.3 ([4.10] *keskitasoa, lyhyehkö*):
Olkoon $n \in \mathbb{N}$ kiinteä ja $A = \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \sum_{j=1}^n (-1)^j x_j = 1\}$. Osoita, että A:ssa on yksikäsitteinen normin minimoiva alkio, ja etsi se.

Vastaus:$y_j := y(j) := (-1)^j \chi_{j\le n}$, jolloin $(x,y)_{\ell^2} := \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{y(j)}x(j) = \sum_{j=1}^n (-1)^j x_j$. Niinpä $A = \{x \in \ell^2 \mid (x,y) = 1\}$. $(\cdot, y) \in \mathcal{L}(\ell^2, \mathbb{C}) =: (\ell^2)^*$ [R2:4.6], joten $A = (\cdot, y)^{-1}[\{1\}]$ on suljettu ja konveksi, mikä nähdään kuten tehtävissä 7.1 ja 7.2. $(y,y) = \sum_{j=1}^n 1 = n$, joten $y/n \in A$ ja $\|y\|_{\ell^2} = \sqrt{n}$. Jos $z \in A$, niin $\|z\| \ge |(z,y)|/\|y\| = 1/\sqrt{n}$ (Schwarz). Nyt $\|y/n\|_{\ell^2} = (1/n)\|y\| = 1/\sqrt{n}$, joten y/n on normin minimoiva alkio. Koska ℓ^2 on Hilbert-avaruus [R2:4.5b], y/n on yksikäsitteinen [R2:4.10].

---

[1] Kompaktissa joukossa jatkuvat funktiot ovat rajoitettuja, joten $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}_b(K) = \mathcal{C}_c(K) = \mathcal{C}_0(K)$ on tapana varustaa sup-normilla. Tätä voidaan myös merkitä $\|\cdot\|_\infty$-normiksi, koska jatkuvuuden avulla nähdään, että se antaa samat arvot (kun $K = [0,1]$ tms. ja $m = \mu$). $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ tms. on tapana varustaa äärettömän monen sup-seminormin ($\sup_{x\in[-N,N]}|f(x)|$ $\forall N \in \mathbb{N}$ tms.) perheen määräämällä topologialla (ks. [R3], ei kuulu tähän kurssiin); siinä funktio suppenee joss se suppenee tasaisesti $\mathbb{R}$:n kompakteissa osajoukoissa.

[2] Tapa 2: Jos $A \ni f_n \to f$, niin $f(0) = \lim_n f_n(0) = 1$, eli $f \in A$.

[3] $s < t$ tarkoittaa, että $s, t \in \mathbb{R} \wedge s < t$. Niinpä yo. merkintä tarkoittaa mm., että $\int_0^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ $\forall f \in A$.

[4] Jos kaksi jatkuvaa funktio $[0,1] \to \mathbb{C}$ ovat samat m.k., ne ovat samat kaikkialla (htl). Huom.: $\sup|f| - f \ge 0$. Jos $g \ge 0$ ja $\int g = 0$, niin $g = 0$ m.k., koska jos $E := \{x \mid g(x) > 0\}$ on positiivimitallinen, niin on myös $\mu(E_n) > 0$ jollain $n \in \mathbb{N}_+$, missä $E_n := \{x \mid g(x) > 1/n\}$, koska $E = \cup_n E_n$. Tästä seuraa, että $\int g \ge \int_{E_n} g \ge \int_{E_n} 1/n = \mu(E_n)/n > 0$, mikä on ristiriita (jos $\int g = 0$).

Tehtävä 7.4 ([4.26] *helppo, nopea*):
Olkoon $L^2([-\pi,\pi])$ Hilbert-avaruus sisätulolla

$$(f,g) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Laske funktion $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ Fourierin kertoimet ortonormaalin joukon $\{e_j \mid j\in\mathbb{Z}\}$ suhteen, missä $e_j(x) := e^{ijx}$.

Vastaus:$\hat{f}(0) := (f,e_0) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e_0}\,dx = 0$. Jos $j\neq 0$, niin

$$\hat{f}(j) := (f,e_j) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e_j(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ijx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\Big|_{-\pi}^{\pi} x\frac{e^{-ijx}}{-ij} - \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\frac{e^{-ijx}}{-ij}\,dx] = \frac{1}{2\pi}[\frac{\pi}{-ij}[e^{-ij\pi}-e^{ij\pi}] - \Big|_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ijx}}{(-ij)^2}]$$

$$\overset{e^{it}=\cos t+i\sin t}{=} \frac{1}{2\pi}[\frac{\pi}{-ij}2\cos j\pi - 0] = \frac{\cos j}{-ij} = (-1)^j/-ij = i(-1)^j/j.$$