Mat-1.150 Reaalianalyysi: 6. harj. vastauksineen ma 3.3.1997 (2 sivua) Välikokeet: 1. vk. ke 12.3. klo 16–19 U325, 2.vk. ma 28.4. klo 12–15 U325.

Huom.: Tässä kuten kirjassakin tutkitaan vain $\mathbb{C}$-kertoimisia sisätulo- ja Hilbert-avaruuksia. $\mathbb{R}$-kertoimiset määriteltäisiin vastaavasti (siis $\alpha \in \mathbb{R}$, joskin ehto [R2:4.1a] on tällöin turha).

Tehtävä 6.1 ([4.4] *triviaali*):
Olkoon H sisätuloavaruus ja $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ sen sisätulon määräämä normi. Todista, että $\|\cdot\|$ on todella normi [R2:5.1] eli että $\forall x, y \in H$
(i) $\|x\| \geq 0 \wedge (\|x\| = 0 \iff x = 0)$,
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$,
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in H$.

Vastaus:(Huom.: Hilbert-avaruus := täydellinen sisätuloavaruus (siis *complete*, eli sellainen, jossa kaikki Cauchy-jonot suppenevat).)
(i) Sisätulon määritelmän perusteella $(x,x) \geq 0$ ja $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Toisaalta $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$, joten $(0,0) = (0 \cdot 0, 0) = 0(0,0) = 0$.
(ii) Myös $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x,y)$ [R2:4.1], joten $\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \bar{\alpha}(\alpha x, x) = \bar{\alpha}\alpha(x,x) = |\alpha|^2(x,x) = (|\alpha| \|x\|)^2$.
(iii) [R2:4.3].
(Huom. normi määrittelee aina metriikan kuten [R2:4.4]:ssä [R2:5.2].)

Tehtävä 6.2 ([4.4] *triviaali*):
Olkoon H sisätuloavaruus. Todista suunnikassääntö (*parallelogram law* [R2:4.10])

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Vastaus:(Nimen selitys: Piirrä suunnikas ($H = \mathbb{C}$), jonka sivut ovat x ja y, jolloin lävistäjien neliöiden summa on sivujen neliöiden summa.)
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 := (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = [(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)] + [(x,x) + (x,-y) + (-y,x) + (-y,-y)] = 2(x,x) + 2(y,y) =: 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Tehtävä 6.3 ([4.18] *(1) sekä (2ade) triviaaleja, (2bc) vaikeita*):
Olkoon H sisätuloavaruus. (1) Todista polaariyhtälö (*polarization identity* [R2:4.18])

$$4(x,y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2.$$

(2) Lisätehtävä innokkaimmille: Jos G on $\mathbb{C}$-kertoiminen normiavaruus [R2:5.2] (eli vektoriavaruus, jossa käytetään (tehtävän 6.1 ehdot täyttävää) normia $\|\cdot\| : G \to [0, \infty[$ (ja sen määräämää metriikkaa)), niin G on sisätuloavaruus[1] joss normi $\|\cdot\|$ toteuttaa suunnikassäännön.

Vastaus:(1) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = [(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)] - [(x,x) + (x,-y) + (-y,x) + (y,y)] + i[(x,x) + (x,iy) + (iy,x) + (iy,iy)] - i[(x,x) + (x,-iy) + (-iy,x) + (-iy,-iy)] = [(x,y) + (y,x)] - [-(x,y) - (y,x)] + i[\bar{i}(x,y) + i(y,x)] - i[-\bar{i}(x,y) - i(y,x)] = 4(x,y)$.
(2) "vain jos" on todistettu tehtävässä 6.2, joten oletetaan suunnikassääntö ja todistetaan

$$(x,y) := [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2]/4 \quad (+)$$

normiksi. Selvästi $(x,y) \in \mathbb{C} \ \forall x, y \in G$. Todistetaan määritelmän [R2:Def4.1] ehdot (a)–(e):
(a) $\|\alpha z\| = \|z\|$, kun $|\alpha| = 1 \wedge z \in G$, joten $i\|y + ix\| = i\|(-i)(y + ix)\| = i\|x - iy\|$, joten $(y,x) = \ldots = [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2]/4 = \overline{(x,y)}$.
(d)&(e) $\|x + ix\| = \|(-i)(x + ix)\| = \|x - ix\|$, joten $(x,x) = [\|x+x\|^2 + 0 + i\|x + ix\| - i\|x + ix\|]/4 = \|x\|^2$, eli (x,x) todella määrää saman normin $\|x\|$. Niinpä normin ehdoista saadaan ehdot (d) ja (e) eli $(x,x) \geq 0 \ \forall x$ ja $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$ [R2:5.1].
Nyt vaikeat kohdat eli (b) ja (c): (b)

$$4(x+z,y) := \|x+z+y\|^2 - \|x+z-y\|^2 + i\|x+z+iy\|^2 - i\|x+z-iy\|^2 \quad (*).$$

$4\,\mathrm{Re}(x+z,y) = \|x+z+y\|^2 - \|x+z-y\|^2 = (\|x+y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2) - (\|x+y-z\|^2 + \|x-y+z\|^2) \overset{ss}{=} (2\|x+y\|^2 + 2\|z\|^2) - (2\|x\|^2 + 2\|y-z\|^2)$ ja

$$4\,\mathrm{Re}(x,y) + 4\,\mathrm{Re}(z,y) = [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] + [\|z+y\|^2 - \|z-y\|^2]$$

$$= [2\|x+y\|^2 - (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)] + [(\|z+y\|^2 + \|z-y\|^2) - 2\|z-y\|^2]$$

$$= [2\|x+y\|^2 - (2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)] + [(2\|z\|^2 + 2\|y\|^2) - 2\|z-y\|^2]$$

$= 2\|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 + 2\|z\|^2 - 2\|z-y\|^2$, joten

$$4\,\mathrm{Re}(x+z,y) = 4\,\mathrm{Re}(x,y) + 4\,\mathrm{Re}(z,y) \quad (**).$$

Selvästi $\mathrm{Im}(x+z,y) \overset{*}{=} \mathrm{Re}(x+z,iy) \overset{**}{=} \mathrm{Re}(x,iy) + \mathrm{Re}(z,iy) = \mathrm{Im}(x,y) + \mathrm{Im}(z,y)$, joten $(x+z,y) = (x,y) + (z,y)$.
(c) Induktiolla (b):stä saadaan perusteella $(nx,y) = n(x,y) \ \forall n \in \mathbb{N}_+$. Toisaalta $(-x,y) + (x,y) = (x-x,y) = (0,y) = 0$ (+), joten $(-x,y) = -(x,y)$. Niinpä $(nx,y) = n(x,y) \ \forall n \in$

[1] Oikeastaan pitäisi sanoa "G on sisätuloutuva", koska alla todistetaan, että on olemassa (polaariyhtälön vuoksi välttämättä yksikäsitteinen) sisätulo, joka määrää G:n normin. Vastaavasti topologista avaruutta, jonka topologia on sama kuin jonkin (ei välttämättä yksikäsitteisen) metriikan määräämä, sanotaan metristyväksi; avaruutta sanotaan metriseksi vain jos tällainen metriikka on valmiiksi sovittu. (Esim. $X = \{a,b\} \wedge \mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ on metristyvä topologinen avaruus, jonka metriikan määräävät $d_1(x,y) := \chi_{x \neq y}$ ja $d_2 := 7d_1$. Kolmialkioisessa avaruudessa voi olla hyvinkin erilaisia metriikkoja.)

$\mathbb{Z}$, mistä saadaan myös $(z,y) = n(\frac{1}{n}z, y)$ (sijoituksella $x := \frac{1}{n}z$) eli $\frac{1}{n}(z,y) = (\frac{1}{n}z, y)$ (kaikki kaavat $\forall x, y, z$) ja lopulta $(\frac{n}{m}x, y) = \frac{1}{m}(nx, y) = \frac{n}{m}(x,y)$ $\forall \frac{n}{m} = q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (ts. $\forall n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Molemmat puolet ovat jatkuvia (koska $\mathbb{C} \ni \alpha \mapsto \alpha x \in G$ ja $H \ni y \mapsto x + y \in H$ ovat jatkuvia $\forall x \in G$, mikä seuraa helposti normin ehdoista), joten sama pätee tiheyden perusteella $\forall q \in \mathbb{R}$.
Lopulta $((r+si)x, y) = (rx, y) + (six, y) = r(x,y) + s(ix, y) = r(x,y) + si(x,y) = (r+si)(x,y)$ $\forall (r+si) \in \mathbb{C}$ (siis $\forall r, s \in \mathbb{R}$), koska määritelmästä nähdään, että $i(x,y) = (ix, y)$.
Siis $(\cdot,\cdot)$ on sisätulo (ja $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ $\forall x \in X$), joten G varustettuna sisätulolla $(\cdot,\cdot)$ on sisätuloavaruus, jonka normi on alunperin annettu $\|\cdot\|$ (ja siis sisätulo määrää saman metriikan $d(x,y) := \|x-y\|$ kuin alkuperäinen (sama) normikin [R2:Def4.4]).

(c) TAPA 2: (hahmottelua) $(\alpha x, x) = [\|(\alpha+1)x\|^2 - \|(\alpha-1)x\|^2 + i\|(\alpha+i)x\|^2 - i\|(\alpha-i)x\|^2/4 = [|\alpha+1|^2 - |\alpha-1|^2 + i|\alpha+i| - i|\alpha-i|]\|x\|^2/4 = \ldots = [4\,\mathrm{Re}\,\alpha + 4i\,\mathrm{Im}\,\alpha]\|x\|^2/4 = \alpha(x,x)$. Sijoituksilla $x = y + z$ ja $x = y + iz$ saadaa uusia yhtälöitä jne. (työläs).

Tehtävä 6.4 ([Luku4] *helppo, nopea*):
Osoita, että $L^p(\mathbb{R})$ ei ole sisätuloavaruus (saati Hilbert-avaruus), jos $2 \neq p \in]0, \infty]$.

Vastaus:(Vihje: osoita, että suunnikassääntö [teht. 6.2] ei päde.)
$\|f\| := [\int_{\mathbb{R}} |f|^p\, dm]^{1/p}$. $f := \chi_{[0,1]} \wedge g := \chi_{]1,2]}$, jolloin $\|f\| = 1 = \|g\|$ ja $\|f+g\| = [2]^{1/p} = \|f-g\|$. Niinpä

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2 \cdot (2^{1/p})^2 = 2^{1+2/p} \neq 2^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2,$$

kun $2 \neq p \in \mathbb{R}_+$. Jos $p = \infty$, niin vast. $1^2 + 1^2 \neq 2 + 2$.

Tehtävä 6.5 ([Luku4] *helpohko, nopeahko, tärkeähkö*):
Olkoon M Hilbert-avaruuden H (vektori)aliavaruus. Osoita, että $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp = \bar{M}$?

Vastaus: Ratkaisun valmistelua: $M^\perp = (\bar{M})^\perp$ $(*)$, sillä triviaalisti $y \perp \bar{M} \Rightarrow y \perp M$ ja toisaalta $(x,y) = 0$ $\forall x \in M \Rightarrow (x,y) = 0$ $\forall x \in \bar{M}$ $(**)$, koska $(\cdot, y)$ on jatkuva [R2:4.6].
Todistetaan $(M^\perp)^\perp = \bar{M}$ kahdessa osassa:
1° $(M^\perp)^\perp \supset \bar{M}$. <u>Tod.:</u> Olkoon $x \in \bar{M}$. Olkoon $M \ni x_n \to x$. Tällöin $(x,y) = (\lim_n x_n, y) = \lim_n (x_n, y) = \lim_n 0 = 0$ $\forall y \in M^\perp$, joten $x \in (M^\perp)^\perp$.
2° $(M^\perp)^\perp \subset \bar{M}$. <u>Tod.:</u> Olkoon $x \in (M^\perp)^\perp$. $x = Px + Qx$, missä $Px \in \bar{M}$ ja $Qx \in \bar{M}^\perp = M^\perp$ [$*$] [R2:4.11a]. Koska $x \perp Qx \in \bar{M}^\perp = M^\perp$, on $0 = (x, Qx) = (Px + Qx, Qx) = (Px, Qx) + (Qx, Qx) = (Qx, Qx)$ eli $Qx = 0$, joten $x = Px + 0 = Px \in \bar{M}$.