Mat-1.150 Reaalianalyysi: 5. harj. vastauksineen ma 24.2.1997 (2 sivua)

Tehtävä 5.1 ([3.6] *helppo, erittäin lyhyt, tärkeähkö*):
Olkoon $0 < p < \infty$. Olkoon $f : X \to \mathbb{C}$ mitallinen ja $\|f\|_p^p := \int_X |f|^p \, d\mu < \infty$ (eli $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$). Osoita, että jokaisella $\epsilon > 0$

$$\mu(\{x \mid |f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \epsilon^{-p} \int_X |f|^p.$$

(Todennäköisyyslaskennassa tämä epäyhtälö on tunnettu Tšebyševin[1] epäyhtälönä.)

Vastaus: $A_\epsilon := \{x \mid |f(x)| \geq \epsilon\}$.

$$\mu(A_\epsilon) = \int_{A_\epsilon} 1 = \epsilon^{-p} \int_{A_\epsilon} \epsilon^p \leq \epsilon^{-p} \int_{A_\epsilon} |f|^p \leq \epsilon^{-p} \int_X |f|^p, \quad \text{QED}.$$

(Huom.: jos $f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^p$ (ts. $\|f\|_p = \infty$), niin epäyhtälö on automaattisesti tosi. Se siis pätee kaikilla $f \in \mathcal{L}(\mu)$.)

Tehtävä 5.2 ([3.1] *keskitasoa, lyhyehkö; vastaesim. vaikea*):
[R2:Exe3.3] Osoita, että jos $\phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ on jatkuva ja toteuttaa ehdon

$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\phi(x) + \phi(y)\right) \ \forall x, y \in]a,b[\quad (*),$$

niin ϕ on konveksi (jatkuvuus on olennainen vaatimus)[2].

Vastaus: (Ratkaisun idea: Konveksisuusehto pätee, kun $\lambda = 1/2$. Yleistetään induktiolla 2^{-n}:n monikertoihin ja sitten jatkuvuuden perusteella kaikkiin $\lambda \in [0,1]$.)

<u>Lemma:</u> Mielivaltaisilla $x, y \in]a,b[$ pätee

$$k, n \in \mathbb{N} \wedge k \leq 2^n \implies \phi(x + k2^{-n}(y-x)) \leq \phi(x) + k2^{-n}(\phi(y) - \phi(x)).$$

<u>Tod.:</u> (induktiolla) 1° $n = 1$: tosi oletuksen perusteella.
2° $n = m$ OK $\implies n = m+1$ OK: Jos $k = 2i$ ($i \leq 2^n/2 = 2^m$), niin $k2^{-n} = i2^{-m}$ ja väite on tosi tapauksen $n = m$ perusteella. Jos $k = 2i+1$ ($i < 2^n/2 = 2^m$), niin

$$\begin{aligned}
\phi\left(x + k2^{-n}(y-x)\right) &= \phi\left(\frac{1}{2}[x + i2^{-m}(y-x) + x + (i+1)2^{-m}(y-x)]\right) \\
&\overset{*}{\leq} \frac{1}{2}\phi\left(x + i2^{-m}(y-x)\right) + \frac{1}{2}\phi\left(x + (i+1)2^{-m}(y-x)\right) \\
&\overset{\text{ind.ol.}}{\leq} \frac{1}{2}[\phi(x) + i2^{-m}(\phi(y)-\phi(x))] + \frac{1}{2}[\phi(x) + (i+1)2^{-m}(\phi(y)-\phi(x))] \\
&= \phi(x) + (2i+1)2^{-m-1}(\phi(y)-\phi(x)). \qquad ////
\end{aligned}$$

Jos nyt $x, y \in]a,b[$ ja $0 \leq \lambda \leq 1$, niin on olemassa rationaalilukujen $r_j = k_j 2^{-n_j}$ jono s.e. $r_j \to \lambda$ (esim. $r_j := \lfloor 2^j \lambda \rfloor 2^{-j} \Rightarrow 0 \leq \lambda - r_j = 2^{-j}(2^j\lambda - \lfloor 2^j \lambda \rfloor) < 2^{-j} \to 0$), joten

$$\phi(x + \lambda(y-x)) = \lim_j \phi(x + r_j(y-x)) \leq \lim_j \{\phi(x) + r_j[\phi(y) - \phi(x)]\} = \phi(x) + \lambda[\phi(y) - \phi(x)].$$

Tehtävä 5.3 ([3.7] *keskitasoa, lyhyehkö, tärkeähkö*):
Olkoon μ X:n positiivinen mitta. Olkoon $\{f_n\}$ jono mitallisia funktioita $X \to \mathbb{C}$. Sanomme, että jono $\{f_n\}$ suppenee kohti funktiota f *mitassa* (μ) (tai *(μ-)mitallisesti*), jos $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ s.e.

$$n \geq N \implies \mu\left(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\right) < \epsilon.$$

Olkoon $\mu(X) < \infty$. Todista:
a) Jos $f_n \to f$ m.k., niin $f_n \to f$ mitassa.
b) Jos $f_n, f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $\forall n$ ja $\|f_n - f\|_p \to 0$, niin $f_n \to f$ mitassa ($1 \leq p < \infty$).

Vastaus: (a) $Y := \{x \in X \mid f_n(x) \to f(x)\}$, jolloin $\mu(X \setminus Y) = 0$. Olkoon $\epsilon > 0$. Merkitään $A_n := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$, $B_n := X \setminus \cup_{k=n}^\infty A_k$. Selvästi $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$.
Osoitetaan, että $Y \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$: Kun $x \in Y$, niin $\exists n$ s.e. $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon \ \forall k \geq n$, jolloin $x \in B_n$.
Siis $\lim_n \mu(B_n) = \mu(\cup_n B_n) = \mu(Y) = \mu(X)$ [R2:1.19d] (koska $Y \subset \cup_n B_n \subset X$ ja $\mu(Y) = \mu(X)$), joten $\mu(A_n) \leq \mu(\cup_{k=n}^\infty A_k) = \mu(X) - \mu(B_n) \to 0$, mistä seuraa väite (siis $\exists N \ \forall n \geq N \ (\mu(A_n) < \epsilon)$).
(b) Olkoon $\epsilon > 0$. Merkitään A_n kuten a-kohdassa. Koska $f_n \underset{L^p}{\to} f$, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ s.e. $n \geq N \implies \int_X |f_n - f|^p < \epsilon^{p+1}$. Nyt

$$n \geq N \implies \mu(A_n) = \int_{A_n} 1 = \epsilon^{-p} \int_{A_n} \epsilon^p \leq \epsilon^{-p} \int_{A_n} |f_n - f|^p \leq \epsilon^{-p} \int_X |f_n - f|^p < \epsilon, \text{QED}.$$

Tehtävä 5.4 ([Luku2] *vaikeahko, keskipitkä*):
[R2:Exe2.24] Askelfunktio (?) (*step function*) on määritelmän perusteella $\mathbb{R}$:n rajoitettujen välien karakterististen funktioiden lineaarikombinaatio. Osoita, että jos $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, niin on olemassa askelfunktioiden g_n jono s.e. $g_n \underset{L^1}{\to} f$ (ts. $\int_{-\infty}^\infty |f - g_n| \to 0$). (Vihje: Tapa1: [R2:3.13] ja m:n säännöllisyys [R2:2.20b] sekä tehtävä 1.5e. Tapa2: Lusinin lause [R2:2.24], tehtävä 3.5 ja $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$-funktioiden tasainen jatkuvuus.)

Vastaus: (Ratkaisun intuitiivinen idea: jos $f = \chi_E$, niin $f \approx \chi_V$ jollain avoimella joukolla $V = \Cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, joten $f \approx \chi_{\Cup_{n=1}^N I_n} =: g$, jollain N (tässä $I_1, I_2, \ldots$ ovat avoimia, pistevieraita

[1] Pafnuti Tšebyšev, 1821–94. Virallinen translitterointi olisi "Čebyšev", mutta translitteroitaessa kyrillisiä kirjaimia latinalaisiksi suomalaisissa (etenkin ei-tieteellisissä) julkaisuissa on tapana tehdä mm. korvaus č↦tš

[2] Ks. [R2: Notes and Comments: Ch. 3, s. 398]. Vastaesimerkki hyödyntänee tekijäryhmiä $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ja valinta-aksioomaa.

välejä). Funktiolle $f = \alpha\chi_E$ kelpaa αg ja funktiolle $s = \sum_k \alpha_k \chi_{E_k}$ kelpaa $\sum_k \alpha_k g_k$. Lopulta käytetään yksinkertaisten funktioiden s tiheyttä L^1:ssä.)

Ratkaisun alustus: Olkoon $E \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$, $m(E) < \infty$ ja $\eta > 0$. Tällöin on olemassa avoin joukko $V \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}$ s.e. $E \subset V$ ja $m(V \setminus E) < \eta/2$ (koska m on säännöllinen [R2:2.20b]). Kuten tehtävässä 1.5e todettiin, on olemassa pistevieraat avoimet välit I_n $(n \in \mathbb{N})$ s.e. $V = \biguplus_n I_n$ (ja I_n ovat rajoitettuja, koska muutoin olisi $m(V) = \infty$). Tällöin $\infty > m(V) = \sum_n m(I_n)$, joten voidaan valita N s.e. $\sum_{n=N+1}^{\infty} m(I_n) < \eta/2$. Nyt

$$\|\chi_E - \sum_{n=1}^{N} \chi_{I_n}\|_1 \le \|\chi_E - \chi_V\|_1 + \|\chi_V - \sum_{n=1}^{N} \chi_{I_n}\|_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{V\setminus E} + \int_{\mathbb{R}} \chi_{V\setminus \cup_{n=1}^{N} I_n} = m(V \setminus E) + m(V \setminus \cup_{n=1}^{N} I_n) < \eta/2 + \eta/2 = \eta.$$

Ratkaisu: Valitaan yksinkertaisten funktioiden jono $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.e. $s_n \underset{L^1}{\to} f$ [R2:3.13]. Jos nyt jokaisella $n \in \mathbb{N}$ valitsemme askelfunktion g_n s.e. $\|g_n - s_n\|_1 < 1/n$, niin

$$\|f - g_n\|_1 < \|f - s_n\|_1 + 1/n \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

kuten haluttiin. Jos $s_n = 0$, valitaan $g_n = 0$; jos $s_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i}\chi_{E_{n,i}}$, niin merkitään $M_n := \max_{i=1,\dots,k_n} |\alpha_{n,i}|$ ja valitaan joukolle $E_{n,i}$ ja luvulle $\eta := 1/nM_nk_n$ välit $I_{n,i,1}, \dots, I_{n,i,N_{n,i}}$ kuten alustuksessa. Sitten valitaan askelfunktio g_n seuraavasti: $g_n := \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} \sum_{j=1}^{N_{n,i}} \chi_{I_{n,i,j}} = \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{N_{n,i}} \alpha_{n,i}\chi_{I_{n,i,j}}$, jolloin

$$\|s_n - g_n\|_1 \le \sum_{i=1}^{k_n} \|\alpha_{n,i}\chi_{E_{n,i}} - \alpha_{n,i}\sum_{j=1}^{N_{n,i}} \chi_{I_{n,i,j}}\|_1$$

$$\le \sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_{n,i}| \|\chi_{E_{n,i}} - \sum_{j=1}^{N_{n,i}} \chi_{I_{n,i,j}}\|_1 < \sum_{i=1}^{k_n} M_n\eta = k_nM_n\eta = 1/n, \text{ kuten haluttiin.}$$

Tehtävä 5.5 ([3.7] *keskitasoa, keskipitkä*):
[R2:Exe3.4e] Olkoon $\int_X |f|^p < \infty$ jollain $p \in]0,\infty[$. Osoita, että $\|f\|_q \to \|f\|_\infty$, kun $q \to \infty$.

Vastaus:[3] Yleisyyttä rajoittamatta oletetaan $R := \|f\|_\infty \in]1,\infty]$.[4]
$a := \int |f|^p < \infty$, $A_r := \{x \mid |f(x)| \ge r\}$.

1^o "$\liminf_{q\to\infty} \|f\|_q \ge R$": Olkoon annettu $R' < R$, meidän on siis osoitettava, että $\exists Q \in \mathbb{R}_+ \, \forall q \ge Q \, [\|f\|_q > R']$.
Valitaan $M \in]R', R[$. $d := \mu(A_M) > 0$ (muutoinhan $R \le M$), $d < \infty$ tehtävän 5.1 perusteella.

$$\|f\|_q^q \ge \int_{A_M} |f|^q \ge dM^q, \text{ joten } \|f\|_q \ge d^{1/q}M.$$

Jos $d \ge 1$, niin $\|f\|_q \ge M > R' \, \forall q \ge p =: Q$, muutoin valitaan $Q > p$ s.e. $d^{1/Q} > R'/M$, jolloin $\|f\|_q \ge d^{1/q}M \ge d^{1/Q}M > R' \, \forall q \ge Q$.

2^o "$\limsup_{q\to\infty} \|f\|_q \le R$": Jos $R = \infty$, 1^o todistaa, että $\|f\|_q \to R$. Olkoon nyt $R \in]1,\infty[$. Valitaan $r < \min(1, R)$, jolloin $d := \mu(A_r) \in \mathbb{R}_+$ (kuten 1^o:ssa). Nyt kaikilla $q \ge p$ pätee $\int_{A_r} |f|^q \le R^q\mu(A_r) = R^qd$ ja $\int_{A_r^c} |f|^q \le \int_{A_r^c} |f|^p \le a$, joten

$$\|f\|_q = [\int_{A_r} |f|^q + \int_{A_r^c} |f|^q]^{1/q} \le [R^qd + a]^{1/q} = R[d + a/R^q]^{1/q} \to R, \text{ kun } q \to \infty,$$

koska $d_q^{b_q} = (e^{\ln d_q})^{b_q} = e^{b_q \ln d_q} \to e^{0 \ln d} = 1$, kun $b_q \to 0+ \wedge d_q \to d \in \mathbb{R}_+$. Siis $\limsup \|f\|_q \le R$, QED.[5] [6]

[3] Tehtävän oletus $\|f\|_p < \infty$ on tarpeen: $\infty = \|\chi_{\mathbb{R}}\|_q \not\to 1 = \|\chi_{\mathbb{R}}\|_1$, kun $m = \mu$.

[4] Jos $f = 0$ m.k., väite on triviaali. Jos $R \in]0,1]$, merkitään $c := 2/R$, jolloin $\|cf\|_\infty = 2 > 1$ ja kohta todistettavan perusteella $c\|f\|_q = \|cf\|_q \to \|cf\|_\infty = c\|f\|_\infty$ eli $\|f\|_q \to \|f\|_\infty$.

[5] Jos $R' > R$, valitaan $Q > p$ s.e. $[d+a/R^q]^{1/q} < R'/R \, \forall q > Q$, jolloin $\|f\|_q < R(R'/R) = R' \, \forall q > Q$.

[6] Huom.: Jos et pidä liminf–limsup-ajattelusta, ajattele näin: Olkoon $R := \|f\|_\infty \in]1,\infty[$. Olkoon $\epsilon > 0$. Kohdan 1^o perusteella $\exists Q_1$ luvulle $R - \epsilon$ ja kohdan 2^o perusteella $\exists Q_2$ luvulle $R + \epsilon$, joten $\forall q \ge \max(Q_1, Q_2)$ $[\|f\|_q \in]R-\epsilon, R+\epsilon[]$. Koska ϵ oli mielivaltainen, $\|f\|_q \to \|f\|_\infty$. (Tapaukseen $R = \infty$ riitti 1^o.)