Mat-1.150 Reaalianalyysi 3. harj. vastauksineen ma 10.2.1997 (2 sivua)

Korjaus: tehtävän 2.5 tulos voidaan todistaa muissakin L^p:issä [R2:teht.3.17].
Tällä kurssilla $\mathbb{N} := \mathbb{N}_1 := \{1, 2, 3, ...\} =: \mathbb{Z}_+$ ja $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\} =: \mathbb{Z}_{+0}$.

Tehtävä 3.1 ([1.4] *keskitasoa*):
Joukon $[0, \infty]$ topologia $\mathcal{T}$ on tapana määritellä seuraavasti: avaruuden $[0, \infty]$ avoimet välit ovat joukot $[0, \infty]$, $[0, b[$, $]a, b[$, $]a, \infty]$, joissa $0 \le a < b \le \infty$, ja avaruuden $[0, \infty]$ avoin joukko on mielivaltainen näiden yhdiste.
(Se, määritelläänkö tyhjä joukko $\mathbb{R}^1$:n (tai $[0, \infty]$:n) väliksi tai $\mathbb{R}^k$:n palloksi, vaihtelee kirjasta toiseen. Tässä tehtävässä sillä ei kuitenkaan ole merkitystä, koska tyhjä joukko on kuitenkin avoin, koska se on nollan välin yhdiste.)
(a) Osoita, että $\mathcal{T}$ on topologia.
(b) Millainen on pisteen ∞ ympäristö? Entä pisteen 0 ympäristö?
(c) Miten tämä liittyy seuraaviin peruskurssin käsitteisiin (tässä $0 < a < \infty$):
(i) $f(x) \to \infty$, kun $x \to a$.
(ii) $f(x) \to a$, kun $x \to \infty$.
(iii) $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$.
(iv) $f(x) \to a$, kun $x \to 0+$.
(d) Miten tulkitset seuraavat lauseet: $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$ on jatkuva
(i) pisteessä $x = \infty$.
(ii) pisteessä $x = 0$.

Huom.: x:n **ympäristö** on avoin joukko, johon x kuuluu. Jos $f : X \to Y$, missä X ja Y ovat topologisia avaruuksia, $b \in X$ ja $c \in Y$, niin
$\lim_{x \to b} f(x) = c$ *joss jokaista c:n ympäristöä V kohti on olemassa b:n ympäristö U s.e. $x \in U \setminus \{b\} \Rightarrow f(x) \in V$.*

(Huom.: (ei liity ratkaisuihin) yo. topologia on $[-\infty, \infty]$:n tavanomaisen topologian indusoima topologia [moniste:1.4] ja $[0, \infty]$ sekä $[-\infty, \infty]$ ovat kompakteja; vastaavasti myös joukkoon $\mathbb{C}$ voidaan liittää piste ∞, tästä tarkemmin [R2]:n loppuosassa.)

Vastaus: (a) Todetaan $\mathcal{T}$:n toteuttavan [R2:1.2]:n ehdot seuraavasti:
(i) $[0, \infty] \in \mathcal{T}$ ja $\emptyset = \cup_{\alpha \in \emptyset} I_\alpha \in \mathcal{T}$ (tyhjä yhdiste).
(ii) [R2:1.2]:n ehdossa (ii) riittäisi vaatia "$V \in \mathcal{T} \wedge V' \in \mathcal{T} \Rightarrow V \cap V' \in \mathcal{T}$", sillä (ii) seuraa tästä induktiolla (htl). Olkoon sitten $V = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$ ja $V' = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}'} I'_\alpha$, missä jokainen I_α ja I'_α on $[0, \infty]$:n avoin väli.
1° Jos $\infty \in V \cap V'$, niin jollain $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ on I_α muotoa $[0, \infty]$ tai $]a, \infty]$. Samoin jokin I'_{α_1} on muotoa $[0, \infty]$ tai $]a_1, \infty]$, joten jollain a_2 ($a_2 := \max(a_0, a_1)$ tms.) on $]a_2, \infty] \subset V \cap V'$. Merkitään tällöin $J_\infty :=]a_2, \infty]$.
2° Jos $0 \in V \cap V'$, niin vast. $J_0 := [0, b_2[\subset V \cap V'$, jollain $b_2 > 0$.
3° Jos $x \in V \cap V' \setminus \{0, \infty\}$, niin joillain $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ ja $\alpha_1 \in \mathcal{A}'$ on $x \in I_{\alpha_0}$ ja $x \in I'_{\alpha_1}$, niinpä $x \in]a, b[=: J_x \subset V \cap V'$ joillain a, b ($a < b$).
4° Nyt jokaiselle $x \in V \cap V'$ on määritelty jokin $[0, \infty]$:n avoin väli $J_x \subset V \cap V'$ s.e. $x \in J_x$. Niinpä $V \cap V' = \cup_{x \in V \cap V'} J_x \in \mathcal{T}$.
(iii) Jos $V_\beta \in \mathcal{T}$ $\forall \beta \in \mathcal{B}$ ja $x \in \cup_{\beta \in \mathcal{B}} V_\beta =: V$, niin $x \in V_{\beta_x}$ jollain $\beta_x \in \mathcal{B}$ ja siis on olemassa avoin väli $I_x \subset V_{\beta_x}$ s.e. $x \in I_x$. Selvästi $V = \cup_{x \in V} I_x \in \mathcal{T}$.

(b) Pisteen ∞ ympäristö on avoin joukko V, johon ∞ kuuluu, ts. jokin $[0, \infty]$:n avointen välien I_α yhdiste, jossa $\infty \in I_\alpha$ jollain α eli jossa I_α on muotoa $[0, \infty]$ tai $]a, \infty]$ jollain α (ja jollain $a \in [0, \infty[$); siis joka tapauksessa V sisältää jonkin muotoa $]a, \infty]$ olevan joukon ($a \in \mathbb{R}_+$); toisaalta jokainen muotoa $]a, \infty]$ oleva joukko on ∞:n ympäristö. Vastaavasti nollan ympäristö sisältää aina jonkin muotoa $[0, b[$ olevan joukon ($b > 0$); toisaalta jokainen muotoa $[0, b[$ oleva joukko on 0:n ympäristö.

(c) (i) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ voidaan ilmaista seuraavin ekvivalentein tavoin:
"Jokaista ∞:n ympäristöä V kohti on oltava olemassa jokin a:n ympäristö W s.e. $x \in W \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V$." (*) eli
Jokaista $]c, \infty]$ ($c < \infty$) kohti on olemassa jokin $]d, e[\ni a$ s.e. $x \in]d, e[\setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in]c, \infty[$. (**) eli
Jokaista $c < \infty$ kohti on olemassa $\delta > 0$ s.e. $x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > c$. (***)
$\forall c < \infty\ \exists \delta > 0\ (x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > c)$. (****)
(*)$\Rightarrow$(**) nähdään valitsemalla $V :=]c, \infty] \in \mathcal{T}$, koska tällöin $a \in]d, e[$ jollain avoimella välillä $]d, e[\subset W$.
(**)$\Rightarrow$(*) nähdään valitsemalla $c < \infty$ s.e. $]c, \infty] \subset V$ ja merkitsemällä $W :=]d, e[$.
(**)$\Rightarrow$(***) nähdään valitsemalla $\delta := \min(|d - a|, |e - a|) > 0$.
(***)$\Rightarrow$(**) nähdään merkitsemällä $d := a - \delta$, $e := a + \delta$.
(***) $\Longleftrightarrow$ (****) Sama asia eri tavoin kirjoitettuna.
Kohdissa (ii)–(iv) nähdään vastaavasti seuraavaa:
(ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists c < \infty\ (\infty > x > c \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(a))$.
(iii) $\forall M < \infty\ \exists c < \infty\ (\infty > x > c \Rightarrow f(x) > M)$.
(iv) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (0 < x < \delta \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(a))$.

(d) "$f : X \to Y$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in X$" tarkoittaa, että "jos V on $f(x_0)$:n ympäristö, niin on olemassa x_0:n ympäristö W s.e. $fW \subset V$ (ts. $x \in W \Rightarrow f(x) \in V$)" [R2:1.4] (huom.: ei "$x \in W \setminus \{x_0\} \Rightarrow ...$") (eli "lähellä x_0:aa olevat pisteet kuvautuvat lähelle $f(x_0)$:aa") eli "$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$". Niinpä $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$ on jatkuva pisteessä ∞ joss jokaista $f(\infty)$:n ympäristöä V kohti on olemassa $c < \infty$ s.e. $f(]c, \infty]) \subset V$. f on jatkuva pisteessä 0 joss jokaista $f(0)$:n ympäristöä V kohti on olemassa $\delta > 0$ s.e. $f([0, \delta[) \subset V$.

(Kuriositeetti: $[0, \infty]$:n kompaktisuus todistetaan seuraavasti: Jos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ on $[0, \infty]$:n avoin peite, niin jollain α_0 on $\infty \in V_{\alpha_0}$, ts. $]a, \infty] \subset V_{\alpha_0}$ jollain $a < \infty$. Merkitään $V'_\alpha := V_\alpha \cap [0, \infty[= V_\alpha \setminus \{\infty\}$ $\forall \alpha$. Tällöin $V'_\alpha \in \mathcal{T}_{[0,\infty[}$ $\forall \alpha$ ja siis kompaktina joukkona $[0, a] \subset V'_{\alpha_1} \cup ... \cup V'_{\alpha_n}$ joillain $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Siis $[0, \infty] = [0, a] \cup]a, \infty] \subset V_{\alpha_0} \cup V_{\alpha_1} \cup ... \cup V_{\alpha_n}$.)

Tehtävä 3.2 ([1.28] *helppo, nopeahko*):

Olkoon $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{kun } 0 \le x < \frac{1}{n}; \\ n^2(\frac{2}{n} - x), & \text{kun } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{kun } x > \frac{2}{n}; \end{cases} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$

Laske a) $\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\,dx$, b) $\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx$ (vrt. Fatou), c) $\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\,dx$ ja d) $\int_0^1 \limsup_{n\to\infty} f_n\,dx$. (Huom.: kuten aiemmin on todettu, Lebesgue-integraali Lebesgue-mitan suhteen (jota yleensä tarkoitetaan, kun mittaa ei kerrota kuten yllä) on sama kuin tuttu Riemann-integraali, mikäli jälkimmäinen on olemassa.)

Vastaus: (Huom.: tämä on melkein tehtävä 2.2.) Selvästi $\int_0^1 f_n = 1$ (kolmion ala) ja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ \forall x \in [0,1]$ ($x > 0 \Rightarrow f_n(x) = 0\ \forall n > \frac{2}{x}$). Siis $\liminf_n \int_0^1 f_n = \limsup_n \int_0^1 f_n = \lim_n \int_0^1 f_n = \lim_n 1 = 1$ ($[-\infty,\infty]$-arvoisilla jonoilla $\liminf$ ja $\limsup$ ovat aina olemassa ja selvästi aina $\exists \lim \iff \liminf = \limsup$) ja $\int_0^1 \liminf_n f_n = \int_0^1 \limsup_n f_n = \int_0^1 0 = 0$.

Tehtävä 3.3 ([1.34] *keskipitkä, vaikeahko*):
Olkoon μ X:n positiivinen mitta, $f : X \to [0,1]$ mitallinen s.e. $\int_X f\,d\mu = c$, $0 < c < \infty$ ja $\alpha > 0$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{kun } 0 < \alpha < 1; \\ c, & \text{kun } \alpha = 1; \\ 0, & \text{kun } \alpha > 1. \end{cases}$$

(Huom.: tässä, kuten yleensä mm. englanninkielisessä kirjallisuudessa log tarkoittaa samaa kuin ln, ellei toisin anneta ymmärtää.) (Vihje: $\alpha \ge 1$: integrandi$\le f \in \mathcal{L}^1$; $\alpha < 1$: Fatoun lemma!)

Vastaus: Olkoon $g_n := n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) = \log\left(\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right)^n\right)$.

Lemma *$\alpha = 1$: $h_n(x) := (1 + \frac{x}{n})^n \overset{n\to\infty}{\nearrow} e^x$ monotonisesti kasvaen $\forall x \ge 0$.*[1]

1° $g_n = \log\left((1 + \frac{f}{n})^n\right) \le \log e^f = f \in \mathcal{L}^1$ [Lemma] ja $g_n(x) \to f(x)\ \forall x$, joten $\int_X g_n \to \int_X f = c$ (dom. konv. ja mon. konv. kumpikin kertovat tämän).

2° $\alpha > 1$: $0 \le (\frac{f}{n})^\alpha \le \frac{f}{n}$ (koska $|f| \le 1$), joten $0 \le g_n \le n\log(1 + f/n)) \le \log e^f = f \in L^1(\mu)$. Lisäksi [Lemma] $g_n = \log\left((1 + \frac{1}{n}\frac{f^\alpha}{n^{\alpha-1}})^n\right) \le \log(\exp(\frac{f^\alpha}{n^{\alpha-1}})) \overset{n\to\infty}{\to} \log\exp 0 = 0$. Niinpä (dom. konv. ($g_n \le f \in L^1$)) $\lim_n \int g_n = \int 0 = 0$.

3° $0 < \alpha < 1$: Koska $\int f > 0$, niin $0 < \mu(A)$, missä $A := \{x \,|\, f(x) > 0\}$. Jos $x \in A$, $g_n(x) = \log\left((1 + (\frac{f(x)}{n})^\alpha)^n\right) = \log\left([1 + \frac{1}{n}(f(x)^\alpha n^{1-\alpha})]^n\right) \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, sillä $\forall M \in \mathbb{R}_+\ \exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.e. $\forall n > N_2$ pätee $g_n(x) > M$ (eli $\left([1 + \frac{1}{n}(f(x)^\alpha n^{1-\alpha})]^n\right) > e^M$), kuten seuraavasta nähdään:

Valitaan $N \in \mathbb{N}$ on s.e. $M' := f(x)^\alpha N^{1-\alpha} > M$. Tällöin $(1 + \frac{1}{n}(f(x)^\alpha n^{1-\alpha}))^n > (1 + \frac{1}{n}M')^n > e^M$, kun $n > N$ on riittävän suuri (koska $(1 + \frac{1}{n}M')^n \to e^{M'} > e^M$) (ts. valitaan N' s.e. $(1 + \frac{1}{n}M')^n > e^M$ ja $N_2 := \max(N, N')$). Niinpä

$$\infty = \int_A \infty = \int_A \liminf g_n \overset{Fatou}{\le} \liminf \int_A g_n \le \liminf \int_X g_n, \text{ joten } \lim_n \int_X g_n = \infty.$$

Tehtävä 3.4 ([Luku 2] *helpohko, lyhyehkö*):
[R2:Exe2.1] Olkoon $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty[\ \forall n \in \mathbb{N}$. (i) Osoita, että seuraavista väittämistä kolme on tosia ja yksi epätosi:
(a) Jos f_1 ja f_2 ovat ylhäältä puolijatkuvia, niin on myös $f_1 + f_2$.
(b) Jos f_1 ja f_2 ovat alhaalta puolijatkuvia, niin on myös $f_1 + f_2$.
(c) Jos jokainen f_n on ylhäältä puolijatkuva, niin on myös $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.
(d) Jos jokainen f_n on alhaalta puolijatkuva, niin on myös $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.
(ii) Mitä tapahtuu, jos $[0,\infty[$ korvataan $]-\infty,\infty[$:llä? (iii) Entä funktioilla $X \to [0,\infty[$ tai (iv) $X \to \mathbb{R}$?

Vastaus: Alla $f_n, f : X \to]-\infty,\infty[$ paitsi toisin mainittaessa.
(Huom.: vastaukset olisivat samoja, vaikka $[0,\infty[$ korvattaisiin $[0,\infty]$:llä ($]-\infty,\infty[$-funktioiden yhteenlasku ei sen sijaan ole aina määritelty (lähinnä $\infty - \infty$)). Tämän todistaminen vaatisi vain pieniä merkinnällisiä muutoksia ao. päätelmiin.)

(a) on aina tosi (i–iv): Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ annettu, $V := \{x \,|\, f_1(x) + f_2(x) < \alpha\}$. Jos $a \in V$, niin $\alpha_a := (f_1 + f_2)(a) := f_1(a) + f_2(a) < \alpha$. Olkoon $\epsilon := (\alpha - \alpha_a)/2$. $(f_1 + f_2)(x) < \alpha$, kun $x \in V_a := \{x \,|\, f_1(x) < f_1(a) + \epsilon\} \cap \{x \,|\, f_2(x) < f_2(a) + \epsilon\} \subset V$, joten V on avoin ($V = \cup_{a\in V} V_a$).

(b) on aina tosi (i–iv), mikä nähdään kuten (a)-kohdassa. (Tapa 2: $-f_1, -f_2$ y. pj., joten $-(f_1 + f_2) = (-f_1) + (f_2)$ y. pj.)

(c) epätosi jopa tapauksessa (i): $f_n := \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$ [2.8b], jolloin[2] $\{x \,|\, \sum_n f_n < 1\} =]0,1]^c \notin \mathcal{T}$.

(d) (i)&(iii) $X \to [0,\infty[$ tosi: $g_N := \sum_{n=1}^N f_n$ on alhaalta puolijatkuva $\forall N$ (b)-kohdan ja induktion perusteella. $\sum_{n=1}^\infty f_n := \lim_{N\to\infty} g_N \overset{*}{=} \sup_N g_N$ on alhaalta puolijatkuva [R2:2.8c], kun $f_n \ge 0\ \forall n$ ($*$ seuraa siitä, että tällöin $g_N \le g_{N+1}\ \forall N$). Tapauksessa (ii)&(iv) väite (d) on epätosi, vastaesim.: $f_n := -\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$ (tämä on (c)-kohdan vastaesimerkin negaatio).

(Huom.: kun $\infty > \beta > 0$, niin f on y.pj. joss βf on y.pj. joss $-\beta f$ on a.pj. (koska $\{x \,\big|\, -\beta f(x) > \alpha\} = \{x \,\big|\, f(x) < -\alpha/\beta\}$).)

---

[1] Tod.: Tunnetusti $h_n(x) \to e^x$. Selvästi $h_1(x) = 1 + x \le 1 + x + x^2/4 = h_2(x) \le 1 + x + x^2/3 + x^3 = h_3(x)$. Tämä pätee $\forall n$: $h_n(x) = (1 + x/n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x/n)^k 1^{n-k}$, joten $h_{n+1}(x) \ge h_n(x)$, koska näiden koonnensien termien suhde on $n^k/[(n+1-k)(n+1)^{k-1}] \ge 1$, koska $f(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ rajoitusehdoilla $0 \le y_j\ \forall j$ ja $\sum_j y_j = kn$ saavuttaa maksiminsa pisteessä $y_j = n\ \forall j$ (nähdään gradientin nollakohdan avulla; tämä tarkoittaa, että geometrinen keskiarvo on enintään aritmeettisen suuruinen).

[2] Tällöin $\sum_n f_n = \chi_{]0,1]} + \chi_{\{1/n \,|\, n\in\mathbb{N}_+\}}$, minkä tietäminen ei ole tarpeen.