Mat-1.150 Reaalianalyysi harjoitus 2 vastauksineen ma 3.2.1997 (1 sivua)

Tehtävä 2.1 ([1.9] *helppo,lyhyt*):
Olkoot $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ mitallisia. (a) Onko $A := \{x \in X \,|\, f_1(x) > f_2(x)\}$ mitallinen? (b) Onko $B := \{x \in X \,|\, f_1(x) \geq f_2(x)\}$ mitallinen?

Vastaus: $g := f_1 - f_2$ on mitallinen [R2:1.9c].
(a) $A = \{x \,|\, g(x) > 0\} = g^{-1}(]0, \infty[) \in \mathfrak{M}$, koska $]0, \infty[\in \mathcal{T}$ ja g on mitallinen (avointen joukkojen alkukuvat mitallisella funktiolla ovat mitallisia).
(b) Tapa 1: $B^c = \{x \,|\, g(x) < 0\} = g^{-1}(]-\infty, 0[) \in \mathfrak{M}$, joten $B = (B^c)^c \in \mathfrak{M}$.
Tapa 2: $B = \{x \,|\, g(x) \geq 0\} = \cap_{n \in \mathbb{N}_+} \{x \,|\, g(x) > -1/n\} \in \mathfrak{M}$ [R2:1.6c].

Tehtävä 2.2 ([1.28] *helppo, lyhyt*):
Näytä esimerkillä, että epäyhtälö Fatoun lemmassa voi olla aito.

Vastaus: Olkoon $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{kun } 0 \leq x < \frac{1}{n}; \\ n^2(\frac{2}{n} - x), & \text{kun } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{kun } x > \frac{2}{n}; \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$
(Huom.: kuten aiemmin on todettu, Lebesgue-integraali Lebesgue-mitan suhteen (jota yleensä tarkoitetaan, kun mittaa ei kerrota kuten yllä) on sama kuin tuttu Riemann-integraali, mikäli jälkimmäinen on olemassa.)

Selvästi $\int_0^2 f_n = 1$ (kolmion ala (piirrä!)) ja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \; \forall x \in [0, 1]$ (koska $x > 0 \Rightarrow f_n(x) = 0 \; \forall n > \frac{2}{x}$). Siis $\liminf_n \int_0^1 f_n = \lim_n \int_0^1 f_n = \lim_n 1 = 1$ ja $\int_0^1 \liminf_n f_n = \int_0^1 \lim_n f_n = \int_0^1 0 = 0$.

(Distribuutioiden avaruudessa (esim. $\mathcal{D}'$) tämän funktiojonon voidaan todistaa suppenevan deltadistribuutioon; ei kuulu tähän kurssiin.)

Tehtävä 2.3 ([1.12] *helpohko, lyhyt*):
Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ s.e. $\{x \,|\, f(x) \geq r\} \in \mathfrak{M} \; \forall r \in \mathbb{Q}$. Osoita, että f on mitallinen.

Vastaus: Olkoon $a \in \mathbb{R}$. $A_a := \{x \,|\, f(x) > a\} = \cup_{a<r\in\mathbb{Q}} \{x \,|\, f(x) \geq r\} =: B_a \in \mathfrak{M}$, koska $\{r \,|\, a < r \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q}$ on numeroituva (ja numeroituvat mitallisten joukkojen yhdisteet ovat mitallisia [R2:1.3a]).[1] Koska $\{x \,|\, f(x) > a\} \in \mathfrak{M} \; \forall a \in \mathbb{R}$, f on mitallinen [R2:1.12c].

Tehtävä 2.4 ([1.24] *helpohko ja nopea, jos mielikuvitusta onnestaa*):
Konstruoi jono $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ välillä $[0, 1]$ jatkuvia funktioita s.e. $0 \leq f_n \leq 1 \; \forall n$ ja $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$ (tavallinen Riemannin integraali (eli Lebesguen integraali [teht2.5])), mutta $f_n(x) \not\to 0 \; \forall x$ (eli $f_n(x)$ ei konvergoi nollaan millään x). (Vrt. monot. konv. [R2:1.26] ja dom. konv. [R2:1.34] sekä Fatoun lemma [R2:1.28].) (P.S. Parissa ensimmäisessä arvauksessasi on luultavasti jotain vikaa.)

Vastaus: $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \ni g_{2^{n+1}+k}(x) := \begin{cases} 2^n(x - \frac{k-1}{2^n}), & \text{kun } x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]; \\ 2^n(\frac{k+1}{2^n} - x), & \text{kun } x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]; \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$, kun $n, k \in \mathbb{N}_0 \wedge 0 \leq k < 2^{n+1}$. Tällöin g_n:ien kuvaajat muodostavat kolmiopiikin, jonka kärki vaeltaa nollasta melkein kahteen (kun k käy nollasta $2^{n+1} - 1$:een) ja aloittaa sitten uuden vaelluksen kapeampana. Kärki (kohdassa $x = k/2^n$) on koko ajan ykkösen korkuinen. Jos $f_n := g_n|_{[0,1]} \in \mathcal{C}([0, 1])$, niin $\int_0^1 f_{2^{n+1}+k} \leq 2^{-n} \to 0$ (kolmion ala), $\liminf_{m\to\infty} f_m(x) = 0 \; \forall x$ ja $\limsup_{m\to\infty} f_m(x) \geq \frac{1}{2} \; \forall x$ (koska $|x - \frac{k}{2^n}| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$ jollain k), joten $f_n \not\to 0 \; \forall x$. (Jos haluttaisiin äärettömän sileät f_n, niin tuo kolmiopiikki voitaisiin korvata äärettömän sileällä funktiolla.)

Tehtävä 2.5 ([1.35] *keskipitkä, keskitasoa*):
Olkoon $f \in \mathcal{L}^1$ ja olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ([R2]:ssa merkitään yleensä $\{f_n\}$) jono mitallisia funktioita X:llä s.e. $f_n \to f$ m.k. ja $\int_X |f_n|\, d\mu \to \int_X |f|\, d\mu$, kun $n \to \infty$. Osoita, että $\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0$, kun $n \to \infty$. (Huom.: Tämä pätee L^p:ssäkin ($\int |\cdot| \mapsto \int |\cdot|^p$), kun $0 < p < \infty$, ja on muitakin tapoja todistaa tulos [R2:teht. 3.17].) (Vihje: muunna dom. konv. lauseen todistusta sopivasti.)

Vastaus: Aloitetaan parilla havainnolla: Jos $\lim_n a_n = a$, niin selvästi $\liminf_n (a_n + b_n) = a + \liminf_n b_n$ (**).[2] Koska $\int |f_n| \to \int |f| < \infty$, on oltava $f_n \in \mathcal{L}^1$ ainakin jostain n lähtien, tutkitaan vain näitä n. Olkoon N sellainen nollajoukko, että $f_n(x) \to f(x) \; \forall x \in N^c$. $\forall g \in \mathcal{L}^1$ $(\int_X g = \int_{N^c} g + \int_N g = \int_{N^c} g)$. Seuraavassa $\int$ tarkoittaa $\int_{N^c} \; d\mu$.

$$2\int |f| = \int (|f| + |f| - 0) = \int \left(\lim_n |f_n| + |f| - \lim_n |f_n - f|\right)$$

$$= \int \lim_n (|f_n| + |f| - |f_n - f|) \overset{Fatou}{\leq} \liminf_n \int (|f_n| + |f| - |f_n - f|)$$

$$= \liminf_n [\int |f_n| + \int |f| - \int |f_n - f|] = \int |f| + \liminf_n [\int |f_n| - \int |f_n - f|]$$

$$\overset{**}{=} \int |f| + \lim \int |f_n| + \liminf [-\int |f_n - f|] = 2\int |f| + \liminf [-\int |f_n - f|],$$

joten $0 \leq \liminf I_n$, missä $I_n := -\int_{N^c} |f_n - f| = -\int_X |f_n - f| \leq 0$ ja siis $\limsup I_n \leq 0$, joten $\liminf I_n = 0 = \limsup I_n$ eli $\exists \lim I_n = 0$ eli $\exists \lim \int_X |f_n - f| = \lim -I_n = -0 = 0$.

---

[1] Onhan $x \in B_a \implies \exists r > a \; [r \in \mathbb{Q} \wedge x \in \{x \,|\, f(x) \geq r\} \subset A_a$ ja toisaalta $x \in A_a \implies f(x) > a \implies \exists r \in]a, f(x)[\cap \mathbb{Q}$, koska $\mathbb{Q}$ on tiheä $\mathbb{R}$:ssä. Niinpä tällöin $x \in \{x \,|\, f(x) \geq r\} \subset B_a$.

[2] Muistathan (tai osannet todistaa), että $\exists \lim_n a_n$ joss $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n$, kun kyse on $[-\infty, \infty]$-arvoisista jonoista (Rudinin lim inf ja lim sup on samat kuin tavalliset (esim. [Rudin1]), vaikka määritelmät ovatkin erinäköiset).
Vähällä vaivalla saanet todistettua, että $\lim_n a_n + \liminf_n b_n = \limsup_n a_n + \liminf_n b_n \geq \liminf_n (a_n + b_n) \geq \liminf_n a_n + \liminf_n b_n = \lim_n a_n + \liminf_n b_n$, mistä väite seuraa.