Mat-1.150 Reaalianalyysi: 12. harj. vastauksineen ma 21.4.1997 (2 sivua) Nämä ovat viimeiset laskuharjoitukset. Toinen välikoe on ma 28.4. klo 12–15 U325:ssä kuten alunperin sovittiin.

Tehtävä 12.1 ([3.14] *keskitasoa, lyhyehkö*):
Todista: $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \wedge 1 \le p < \infty \implies \lim_{|h|\to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0$.

Vastaus: 1^o Olkoon $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Valitaan $R > 0$ s.e. $\operatorname{supp} f \subset \bar{B}(0,R)$. f on tasaisesti jatkuva.[1] Jos sitten $\epsilon > 0$ ja $|h| < \delta''_\epsilon := \min(\delta_{\epsilon/m(B_{R+1})^{1/p}}, 1)$, niin

$$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dm \le \int_{B(0,R+1)} [\epsilon/m(B_{R+1})^{1/p}]^p \, dm = \epsilon^p.$$

2^o Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \wedge \epsilon > 0$. Valitaan $g \in \mathcal{C}_c$ s.e. $\|f-g\|_p < \epsilon/3$. Valitaan funktiolle g luku $\delta''_{\epsilon/3} > 0$ kuten yllä.

$$|h| < \delta''_{\epsilon/3} \implies \|f - f(\cdot+h)\|_p \le \|f-g\|_p + \|g - g(\cdot+h)\|_p + \|g(\cdot+h) - f(\cdot+h)\|_p < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3,$$

koska muuttujanvaihdolla [R2:7.26] nähdään, että $\|F(\cdot+h)\|_p = \|F(\cdot)\|_p \ \forall F \in L^p$.[2]

Tehtävä 12.2 ([8.14] *vaikea, pitkä*):
Määritellään $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $J(x) := ce^{-(1-x^2)^{-1}} \chi_{B(0,1)}(x)$, missä $c \in \mathbb{R}_+$ on valittu s.e. $\|J\|_1 = 1$, $x^2 := x \cdot x = |x|^2$. $J_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} J(x/\epsilon)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$. Olkoon $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \wedge f_\epsilon := f * J_\epsilon$. Todista:
(i) $J, J_\epsilon, f_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\forall \epsilon > 0$.
(ii) $f \in \mathcal{C}_c \implies f_\epsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\forall \epsilon > 0$.
(iii) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \implies f_\epsilon \to f$ tasaisesti jokaisessa kompaktissa $K \subset \mathbb{R}^n$ (ts. $\mathcal{C}$:ssä).
(iv) $f_\epsilon(x) \overset{\epsilon\to 0+}{\to} f(x)$ kaikissa f:n Lebesgue-pisteissä x, siis m.k.

Vastaus:(i) 1° $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, kun $F(x) := e^{-(1-x^2)^{-1}} \chi_{]0,1[}$: $F_{|]0,1[} = e^{-(1-x^2)^{-1}} \in \mathcal{C}^\infty(]0,1[, \mathbb{R})$ (koska derivoituvien funktioiden summat, erotukset, tulot, yhdisteet ja osamäärät (nimittäjän nollakohdan ulkopuolella) ovat derivoituvia [R1]) ja $F_{|]1,\infty[} \equiv 0 \in \mathcal{C}^\infty(]1,\infty[, \mathbb{R})$, joten riittää todistaa kaikkien derivaattojen olemassaolo pisteessä $x = 1$. Siinä oikeanpuoleinen derivaatta $F'_+(1) = 0$ selvästi,

$$F'_-(1) := \lim_{h\to 1-} (h-1)^{-1}[F(h) - F(1)] = -\lim_{h \to 1-} (1-h)^{-1} F(h) = 0,$$

koska $|(1-h)^{-1}F(h)| = |(1+h)(1-h^2)^{-1}F(h)| \to 0$, koska $t \to +\infty \implies p(t)e^{-t} = p(t)/e^t \to 0$, kun p on polynomi $(*)$ [R1] (sijoita $t := (1-h^2)^{-1}$) (ja $(1+h) \to 1$ on rajoitettu).

Induktion perusteella $F^{(k)}(x)$ on (äärellinen) summa termeistä muotoa $(1-x^2)^{-j} q(x) F(x)$, missä $j \in \mathbb{N}_0$ ja q on polynomi (siis q on rajoitettu kompaktissa $[1/2, 2]$), kun $x \in]0,1[\wedge k \in \mathbb{N}_0$ (triviaalisti sama pätee myös kun $x \in]1,\infty[\wedge k \in \mathbb{N}_0$). Niinpä $\exists F^{(k+1)}(1) = \lim_{h\to 1-} (h-1)^{-1}[F^{(k)}(h) - 0] = 0$ nähdään samalla tavalla kuin $\exists F'(1) = 0$ todistettiin edellisessä kappaleessa.[3]

2° $J \in \mathcal{C}^\infty$: $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}_+)$, kun $g(x) := \sqrt{x^2} := e^{(\operatorname{Ln} x^2)/2}$, koska $(x \mapsto x^2 = \sum_j x_j^2) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}_+)$ ja $\operatorname{Ln} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Niinpä $J = cF \circ g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. Toisaalta $J_{|B(0,1)} = ce^{-(1-x^2)^{-1}} \in \mathcal{C}^\infty(B(0,1), \mathbb{R})$ (erityisesti J:llä on kaikki derivaatat origossa), joten se on $\mathcal{C}^\infty$ koko $\mathbb{R}^n$:ssä.

3° $J_\epsilon \& f_\epsilon$: J_ϵ on kahden $\mathcal{C}^\infty$-funktion yhdiste, siis $\mathcal{C}^\infty$ [ketjusääntö&induktio]. $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty$ seuraa ao. lemmasta, jossa on muutakin tietämisen arvoista (kurssiin kuulumatonta) asiaa.

Lemma 0.0.1 *(a) Jos $f \in L^p$ ja $F \in L^{p'}$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), niin $\forall q$ $\exists F * f(q)$ (huom.: $F * f(q)$ tarkoittaa $(F*f)(q)$), $F * f \in \mathcal{C}_{bu}$ ja $\|F * f\|_\infty \le \|F\|_{p'} \|f\|_p$ (erityisesti $*$ on jatkuva $L^p \times L^{p'} \to \mathcal{C}_{bu}$) Jos lisäksi $1 < p < \infty$, niin $F * f \in \mathcal{C}_0$.*
(b) Jos $1 \le p \le \infty$, $F \in L^1$ ja $f \in L^p$, niin m.k. *q $\exists F * f(q)$ ja $\|F * f\|_p \le \|F\|_1 \|f\|_p$.*
(c) Olkoon $F \in L^1(\mathbb{R}^n) \wedge g \in \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^n)$. Tällöin $F * g \in \mathcal{C}_{bu}^k$ ja $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $[\partial_{x_{j_1}} ... \partial_{x_{j_k}} (F * g)(x) = (F * \partial_{x_{j_1}} ... \partial_{x_{j_k}} g)(x)]$, kun $j_1, ..., j_k \in \{1, ..., n\}$.
(d) Olkoon $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \wedge g \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n)$. Tällöin $F * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$.

Todistus: Huom.: $L^p_{loc}(X) := \{f \in L \mid f_{|K} \in L^p(K) \ \forall K \subset\subset X\}$, joten $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ [Hölder&$\|\chi_K\|_{p'} < \infty$].
(a) $\exists F * f(q)$ ja $|F * f(q)| \le \|F\|_{p'} \|f\|_p$ seuraavat Hölderin epäyhtälöstä. Jatkuvuus:

$$|F * f(q+h) - F * f(q)| = |\int_{\mathbb{R}^n} F(q+h-r) f(r) \, dr - \int_{\mathbb{R}^n} F(q-r) f(r) \, dr|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} |F(q+h-r) - F(q-r)| |f(r)| \, dr \overset{\text{Hölder}}{\le} \|\tau_h F - F\|_{p'} \|f\|_p \to 0,$$

koska $\|\tau_h F - F\|_{p'} \to 0$ [teht.12.1], kun $h \to 0$ ja $1 \le p' < \infty$ (vaihda f:n ja F:n paikkaa, jos $p' = \infty$).
Muutkin väitteet on helpohko todistaa, mutta niitä ei tässä tarvita.
(b) [teht. 12.3].

[1] Kompaktissa joukossa jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva [R1], joten $f_{|\bar{B}(0,R+1)}$ on tasaisesti jatkuva ($\forall \epsilon \ \exists \delta_\epsilon \ \forall x, y ...$). Tästä seuraa, että f on tasaisesti jatkuva koko $\mathbb{R}^n$:ssä (valitse $\delta'_\epsilon := \min(\delta_\epsilon, 1)$).

[2] Operaatiota $\tau_h : f \mapsto f(\cdot + h)$ sanotaan translaatioksi. Selvästi $\tau_h \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$, kun $1 \le p \le \infty$. Tehtävässä sovellettiin myös triviaalia tulosta $\tau_h(f+g) = \tau_h f + \tau_h g$. Tehtävän tulos ei päde $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:ssä (htll).

[3] Koska $F^{(k)}$ on derivoituva, se on jatkuva, tämä siis $\forall k$. Huom.: $\mathbb{R}^n$:ssä derivoituvuudesta ei seuraa jatkuvuutta, mutta differentioituvuudesta seuraa [R1].

(c) $\mathcal{C}_b \subset L^\infty$, joten konvoluutio on olemassa ja $\in \mathcal{C}_{bu}$ [a]. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n \wedge j \in \{1, ..., n\}$. Todistetaan ensin $\exists \partial_j(F * g) = F * g_j$:

$$|\frac{F*g(x+he_j)-F*g(x)}{h} - F*g_j(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |F(y)[\frac{g(x+he_j-y)-g(x-y)}{h} - g_j(x-y)]|\,dy$$
$$\overset{\text{väliarvolause}}{\le} \int |F(y)[g_j(x+\xi_{h,x,y}-y) - g_j(x-y)]| \overset{dom.konv.}{\to} \int |F(y)0| = 0,$$

koska $(y \mapsto 2|F(y)| \sup |g_j|) \in L^1$ majoroi integrandia $\forall h$. Niinpä $\exists \partial_j(F*g) = F*g_j$. Loppu saadaan tästä induktiolla.

(d) Valitaan $R > 0$ s.e. $\operatorname{supp} g \subset B(0,R)$. Riittää todistaa, että $F * g \in \mathcal{C}^k(B(x,1))$ mielivaltaisella $x \in \mathbb{R}^k$. Selvästi $y \in B(x,1) \Rightarrow F * f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y-z)f(z)\,dz = \int_{B(0,R)} F(y-z)f(z)\,dz = \int_{B(0,R)} G(y-z)f(z)\,dz = G * f(y)$, missä $G := F\chi_{\bar{B}(x,R+1)} \in L^1$ ja loppu seuraa (c):stä. $\square$

(ii) Olkoon $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$. Tällöin $\operatorname{supp} f_\epsilon \subset B(0, R+\epsilon)$, koska $|x| > R + \epsilon \Longrightarrow$

$$f_\epsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)J_\epsilon(x-y)\,dy = \int_{B(0,R)} f(y)J_\epsilon(x-y)\,dy = \int_{B(0,R)} f(y)0\,dy = 0,$$

sillä $\operatorname{supp} J_\epsilon = \bar{B}(0,\epsilon)$ ja $|x-y| \ge |x| - |y| > \epsilon\ \forall y \in B(0,R)$.

(iii) Olkoon $K \Subset \mathbb{R}^n$. Valitaan R s.e. $K \subset B(0,R)$. Jatkuva funktio on kompaktissa joukossa tasaisesti jatkuva [R1], joten $\forall \epsilon' > 0$ voidaan valita $\delta' > 0$ s.e. $x, y \in \bar{B}(0, R+1) \wedge |x-y| < \delta' \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon'$. Koska $\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(y-x)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} J(y-x)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} J(z)\,dz = 1$[4], pätee $\forall x \in K\ \forall \epsilon < \delta_{\epsilon'} := \min(\delta', 1)$

$$|f(x)-f_\epsilon(x)| \le |\int_{\mathbb{R}^n} f(y)J_\epsilon(x-y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n} J_\epsilon(x-y)\,dy| = |\int_{\mathbb{R}^n}[f(y)-f(x)]J_\epsilon(x-y)\,dy|$$

$\le 0 + \int_{B(x,\epsilon)} |f(y)-f(x)|J_\epsilon(x-y)\,dy < \epsilon' \int_{B(x,\epsilon)} J_\epsilon(x-y)\,dy = \epsilon'$.
Koska ϵ' oli mielivaltainen, suppeneminen on tasaista joukossa K.[5]

(iv) $\max J_\epsilon = \epsilon^{-n} \max J = c' m(B_\epsilon)^{-1}$ jollain $c' > 0$ (koska $m(B_\epsilon) = c''\epsilon^n$), joten kohdan (iii) tapaan
$\int_{B(x,\epsilon)} |f(y)-f(x)|J_\epsilon(x-y)\,dy \le c' m(B_\epsilon)^{-1} \int_{B(x,\epsilon)} |f(y)-f(x)|\,dy \to 0$. [R2:7.6&7.7] [6]

Tehtävä 12.3 ([8.14] *helpohko, lyhyehkö*):
Olkoon $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \wedge g \in L^1(\mathbb{R}^n) \wedge 1 \le p \le \infty$. Todista, että $\exists (f*g)(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g \in L^p$ ja $\|f*g\|_p \le \|f\|_p\|g\|_1$.
(Vihje: Minkovskin integraaliepäyhtälö (ei tavallinen).)

Vastauksen valmistelua: Minkovskin integraaliepäyhtälön todistaminen onnistuu kohtuuvaivalla, ks. esim. [TID2:1.16.11].

Lause 0.0.2 (Minkovskin integraaliepäyhtälö) *Olkoot (Q,μ) ja (R,ν) σ-äärellisiä mitta-avaruuksia. Varustetaan $Q \times R$ mitalla $\mu \times \nu$; jos μ ja ν ovat täydellisiä, voidaan yhtä hyvin käyttää mittaa $\overline{\mu \times \nu}$. Olkoon $f \in \mathcal{L}(Q \times R, [0,\infty])$ ja $1 \le p \le \infty$*

$$\|\int_R f\|_{L^p(Q)} \le \int_R \|f\|_{L^p(Q)} \le \infty.$$

Huom.: $(q \mapsto \int_R f(q,\cdot)\,d\nu) \in \mathcal{L}(Q, [0,\infty])$ [Fubini]. Mitoista: $m_{\mathbb{R}^{2n}}$ on mitan $m_{\mathbb{R}^n} \times m_{\mathbb{R}^n}$ täydellistymä [R2:8.11], joten yo. lause soveltuu nyt hyvin.

Lauseen todistus onnistuu kohtuuvaivalla (esim. ensin yksinkertaisille funktioille, sitten ...). Todistus sivuutetaan (ks. esim. [TID2:1.16.11]).

Varsinainen tehtävä: Seuraavassa $\|\ \|_p$ tarkoittaa L^p-normia argumentin q-suhteen.

$$\|\int |f(q-r)g(r)|\,dr\|_p \overset{MinkII}{\le} \int \|f(q-r)g(r)\|_p\,dr$$
$$= \int |g(r)| \cdot \|f(q-r)\|_p\,dr = \int |g(r)| \cdot \|f\|_p\,dr = \|f\|_p\|g\|_1 < \infty,$$

joten $\int |f(q-r)g(r)|\,dr < \infty$ m.k. q, ts. $f(q-\cdot)g(\cdot) \in L^1$ m.k. q, joten $\exists (f*g)(q) := \int f(q-r)g(r)\,dr$ m.k. q. Lisäksi $\|f*g\|_p := \|\int f(\cdot-r)g(r)\,dr\|_p \le \|\int |f(\cdot-r)g(r)|\,dr\|_p \le \|f\|_p\|g\|_1$.

Tehtävä 12.4 ([8.16] *helpohko,nopeahko*):
Olkoon $0 < p < \infty$ ja kuulukoon $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ heikkoon $L^p(\mathbb{R}^n)$:ään, ts. olkoon olemassa $c \ge 0$ s.e. $m(\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |f(x)| > \lambda\}) \le c\lambda^{-p}\ \forall \lambda > 0$.
Todista, että $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L \,\big|\, f|_K \in L^q(K)\ \forall K \Subset \mathbb{R}^n\}$, kun $0 < q < p$.

Vastaus:(Huom.: L :=mitallisten funktioiden ekvivalenssiluokat, ts. L^p yms. ovat L:n vektorialiavaruuksia.)
Olkoon $K \Subset \mathbb{R}^n$, riittää siis todistaa $\int_K |f|^q\,dm < \infty$. Merkitään $g := |f||_K$, $A := \{g > 1\} := \{x \in K \,\big|\, g(x) > 1\}$. $\int_K |f|^q\,dm = \int_K g^q\,dm = \int_A g^q\,dm + \int_{A^c} g^q\,dm \le \int_A g^q\,dm + m(K)$, joten riittää todistaa, että $\int_A g^q\,dm < \infty$.

$$\int_A g^q\,dm = \int_K (\chi_A g)^q\,dm \overset{8.16}{=} \int_0^\infty m\{\chi_A g > t\}qt^{q-1}\,dt = \int_0^1 m(A)qt^{q-1}\,dt$$
$$+ \int_1^\infty m\{g > t\}qt^{q-1}\,dt \le m(A) + \int_1^\infty ct^{-p}qt^{q-1}\,dt < \infty, \quad \text{koska } q - p - 1 < -1.\text{[7]}$$

Vihjeitä: **12.1**: Oleta ensin $f \in \mathcal{C}_c$. Sitten sovella tiheyttä.
12.2: Jos tuntuu vaikealta, oleta $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (jälkeenpäin on helppo yleistää tulos L^1_{loc}:iin). (i) J, J_ϵ helppoja. f_ϵ: derivointi integraalin alla on helpointa todistaa dominoidun konvergenssin (ja derivaatan määritelmän) avulla. (ii) Helppo. (iii) Muista, että jatkuva funktio on kompaktissa joukossa tasaisesti jatkuva. (iv) Kirjoita auki erotuksen normi, $\max J_\epsilon =?$, sovella Lebesgue-pisteen määritelmää. **12.3**: Minkovskin integraaliepäyhtälö.
12.4: Rajoitu johonkin $K \Subset \mathbb{R}^n$. $A := \{x \in K \,\big|\, f(x) > 1\}$, $\int_K = \int_A + \int_{A^c}$, sovella [R2:8.16].

[4] Tavallinen muuttujanvaihto, voit käyttää kaavaa [R2:7.26(15)] tai jopa peruskurssiteoriaa, koska J on jatkuva (kyseessä on siis Riemannin integraali.

[5] $\mathcal{C}$:ssä käytetään yleensä seminormien $f \mapsto \sup_{x \in K} |f(x)|$ määräämää (Fréchet-)topologiaa [R3], joten voidaan merkitä, että $f_\epsilon \underset{\mathcal{C}}{\to} f$.

[7] Tässä siis sovellettiin lausetta [R2:8.16] apufunktiolla $\phi(t) := t^q$, mikä on sallittua, koska $\phi \in AC(0,T)\ \forall T > 0$ jne., koska $\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(s)\,ds \wedge \phi' \in L^1([0,T])$.