Mat-1.150 Reaalianalyysi: 11. harj. vastauksineen ma 14.4.1997 (2 sivua)
Viimeiset (12.) laskuharjoitukset ovat ma 21.4. Toinen välikoe on ma 28.4. klo 12–15 U325:ssä, kuten alunperin sovittiin.

Tehtävä 11.1 ([7.20] *helpohko, lyhyehkö*):
Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ on *Lipschitz-jatkuva* eksponentilla $\alpha \geq 0$ (merkitään $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([a,b]) =: \mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$), joss on olemassa vakio $L_f \geq 0$ s.e.

$$|f(x)-f(y)| \leq L_f|x-y|^\alpha \ \forall x,y \in [a,b].$$

Todista:
(i) $f \in \mathcal{C}_b^1(]a,b[) \implies f \in \mathcal{C}^{0,1}(]a,b[)$ (ts. jos f ja f' ovat jatkuvia ja rajoitettuja, niin $f \in \mathcal{C}^{0,1}([a,b])$).
(ii) $f \in \mathcal{C}^{0,1}([a,b]) \iff f \in \mathrm{AC}([a,b]) \wedge f' \in L^\infty$.
(iii) [R2:Exe7.11] $f \in \mathrm{AC}([a,b]) \wedge f' \in L^p([a,b]) \wedge p \in]1,\infty[\implies f \in \mathcal{C}^{0,1-1/p}([a,b])$.
(iv) $\alpha > 1 \wedge f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([a,b]) \implies f \equiv c \in \mathbb{C}$ (vakiofunktio).

Vastaus: Huom.: $f \in \mathrm{AC} \implies \exists f'(x)$ m.k. [7.20] ja $\exists f'(x)\ \forall x \implies f \in \mathrm{AC}$ [7.21] (mutta $\exists f'(x)$ m.k. $\not\Longleftarrow f \in \mathrm{AC}$ [7.16b]). AC-funktiot ovat ne, jotka ovat derivaattojensa integraaleja (ht).
(i) $L_f := \|f'\|_\infty = \sup|f'| < \infty$.

$$|f(x)-f(y)| = |\int_y^x f'(t)\,dt| \leq \int_y^x |f'(t)|\,dt \leq \int_y^x L_f\,dt = |x-y|L_f \ \forall x,y \in]a,b[.$$

(ii) "$\Longleftarrow$": Todistetaan kuten (i):ssä (vrt. [7.20]). "$\Longrightarrow$": Olkoon $f \in \mathcal{C}^{0,1} \wedge \epsilon > 0$. Valitaan $\delta_\epsilon := \epsilon/L_f$. Nyt AC-määritelmässä [7.17] on

$$\sum_{i=1}^n |f(\beta_i)-f(\alpha_i)| \leq \sum_{i=1}^n L_f|\beta_i-\alpha_i| < L_f\delta_\epsilon = \epsilon,$$

joten δ_ϵ kelpaa, siis $f \in \mathrm{AC}$. Siksi $\exists f'(y)$ m.k. y. Tulos $\|f'\|_\infty \leq L_f < \infty$ seuraa siitä, että näillä y on

$$|f'(y)| = \left|\lim \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \lim\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \lim\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq \limsup \frac{L_f|y-x|}{|y-x|} = L_f.$$

(iii) $|f(s)-f(t)| = |\int_t^s f'| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f'\|_{L^p([t,s])}\|1\|_{L^q([t,s])} \leq \|f'\|_p|s-t|^{1/q}$, QED.
(iv) Olkoon $c \in [a,b]$. $a_{n,k} := a + k(c-a)/n\ \forall k,n$. Tällöin

$$|f(c)-f(a)| \leq \sum_{k=1}^n |f(a_{n,k})-f(a_{n,k-1})| \leq L_f\sum_{k=1}^n |a_k - a_{n,k-1}|^\alpha$$

$$= L_f\sum_{k=1}^n |(c-a)/n|^\alpha = L_f|(c-a)/n|^\alpha n = L_f(c-a)^\alpha n^{1-\alpha}\ \forall n \in \mathbb{N}_+$$

ja $n^{1-\alpha} \to 0$, kun $n \to \infty$, joten $|f(c)-f(a)| = 0$, tämä siis mielivaltaisella $c \in [a,b]$, joten $f \equiv f(a) \in \mathbb{C}$, QED.

Kommentteja: $f \in \mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ ilmaistaan joskus sanomalla "f toteuttaa Lipschitz-ehdon (Hölder-ehdon) vakiolla α" tai f on "Hölder-jatkuva eksponentilla α tms.". $\mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ on Banach-avaruus normilla $\|f\| := M_f + \sup_x|f(x)|$ [R2:Exe5.11], missä M_f on sopivien L_f infimum (se on myös minimi); $\mathcal{C}_b^1([a,b]) \subsetneq \mathrm{Lip}_1([a,b]) \subsetneq \mathrm{AC}([a,b]) \subsetneq \mathrm{BV}([a,b]) \cap \mathcal{C}([a,b])$ (ht).

Tehtävä 11.2 ([2.22] *helpohko, lyhyt*):
Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon N joss $E \subset [a,b] \wedge \exists m(E) = 0 \implies \exists m(f[E]) = 0$ (ts. nollamitallisten joukkojen kuvat ovat nollamitallisia).
Todista: jos $f[E] \in \mathfrak{M}_\mathbb{R}\ \forall E \in \mathfrak{M}_{[a,b]}$ (ts. mitallisten joukkojen kuvat ovat mitallisia), niin f toteuttaa ehdon N.

Vastaus: Vastaoletus: $m(E) = 0 \wedge m(f[E]) > 0$. Valitaan ei-mitallinen $A \subset f[E]$ [2.22] ja merkitään $B := f^{-1}[A] \cap E$. Tällöin $m(B) = 0$, koska $B \subset E \wedge m(E) = 0 \wedge m$ on täydellinen [2.20&1.36] (sehän on saatu Borel-mitan täydellistymänä, ts. nollamitallisten osajoukot on määritelty nollamitallisiksi etc.). Kuitenkin selvästi $f[B] = A$, ristiriita, QED.

Tehtävä 11.3 ([7.19] *helpohko, nopeahko*):
$BV([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, V_f(b) < \infty\}$ (rajoitetusti heilahtelevat funktiot), $V_f(b) := \sup_{n,t_0,t_1,\ldots}\sum_{j=1}^n |f(t_j)-f(t_{j-1})|$ [7.19]. Todista:
(i) Jos f on monotoninen ja rajoitettu, niin $f \in \mathrm{BV}([a,b])$.
(ii) Todista, että $g \in \mathcal{C}([0,1]) \setminus \mathrm{BV}([0,1])$, kun

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0; \\ x\sin(\frac{\pi}{x}), & \text{kun } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

(iii) Näytä, että $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ voidaan esittää kahden monotonisen funktion erotuksena.
(iv) Näytä, että $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ on rajoitettu.

Vastaus:(i) Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kasvava. Tällöin $V_f(b) := \sup\sum_{j=1}^n |f(t_i)-f(t_{i-1})| = \sup\sum_{j=1}^n f(t_i)-f(t_{i-1}) = f(b)-f(a) < \infty$. Jos f on laskeva, niin vastaavasti $V_f(b) < \infty$, QED.
(ii) Jatkuvien funktioiden tulo on jatkuva, joten $g \in \mathcal{C}^\infty(\{0\}^c)$. Toisaalta $|g(x)-g(0)| \leq |x| < \delta_\epsilon := \epsilon$, joten $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.
Osoitetaan, että $V_g > M$ mielivaltaisella $M < \infty$. Valitaan n s.e. $\sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{j} > M$.

$x_0 =: 0$, $x_n := 1$, $x_j := \frac{1}{n-j+\frac{1}{2}}$ $(j = 1, ..., n-1)$. Tällöin $g(x_j) = x_j \sin((n-j)+\frac{1}{2})\pi = (-1)^{n-j} x_j$.

$$V_g(1) \geq \sum_{j=2}^{n-1} |g(x_j) - g(x_{j-1})| = \sum_{j=2}^{n-1} |x_j + x_{j-1}| \geq \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{n-j+1} \overset{i:=n-j+1}{=} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i} > M.$$

(iii) $g(x) := [V_f(x) + f(x)]/2$, $h(x) := [V_f(x) - f(x)]/2$. Selvästi $f = g - h$. $V_f + f$ ja $V_f - f$ ovat kasvavia, mikä todistetaan kuten [7.19]:ssä.

(iv) $|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq V_f(x) + |f(a)| \leq V_f(b) + |f(a)|$ $\forall x \in [a, b]$.

Tehtävä 11.4 ([7.12] *keskitasoa, lyhyt*):
Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \wedge r \in \mathbb{R}_+$. Todista, että $x \mapsto (m(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} f\,dm$ on jatkuva.

Vastaus: Koska $(m(B(x,r))^{-1}$ on vakio, riittää todistaa jatkuvaksi g, missä $g(x) := \int_{B(x,r)} f\,dm = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x,r)} f\,dm$, ts. todistetaan $g(x) \to g(x_0)$, kun $x \to x_0$. Tällöin $(\chi_{B(x,r)} f)(y) \to (\chi_{B(x_0,r} f)(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B(x_0, r)$, koska

$$y \in B(x_0, r) \implies \chi_{B(x,r)}(y) = 1 = \chi_{B(x_0,r)}(y) \text{ kun } |x - x_0| < r - |y - x_0|.$$

$$y \in \bar{B}(x_0, r)^c \implies \chi_{B(x,r)}(y) = 0 = \chi_{B(x_0,r)}(y), \text{ kun } |x - x_0| < |y - x_0| - r.$$

Toisaalta $|\chi_{B(x,r)} f| \leq |f| \in L^1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, joten $(A := \partial B(x_0, r))$ dominoidun konvergenssin lauseen perusteella $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x,r)} f\,dm = \int_{A^c} \chi_{B(x,r)} f\,dm \to \int_{A^c} \chi_{B(x_0,r)} f\,dm = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x_0,r)} f\,dm = \int_{B(x_0,r)} f\,dm$, kun $x \to x_0$, QED.[1]

Vihjeitä: **11.1**: Muista, että AC-funktio on derivaattansa integraali [7.20]. (iv) valitse $\{t_i\}$ tasavälein.
11.2: Ota $f[E]$:n ei-mitallinen osajoukko [2.22], sitten sopiva E:n osajoukko, ...
11.3: (i) Määritelmästä. (ii) Olkoon $M < \infty$. Etsi $x_1, x_2, ..., x_{n_M}$ s.e. $V_g(1) \geq ... \geq M$. (iii) Sovella [7.19]:ää (osin pätee kaikille $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ei vain $f \in$ AC). (iv) Määritelmästä.
11.4: $\int_{B(x,r)} f\,dm = \int \chi_{B(x,r)} f\,dm$, sovella dominoitua konvergenssia.

[1] Kuten aiemmissa harjoituksissa todettiin, [R1:4.2]:n perusteella em. lause pätee paitsi jonoille, myös $\mathbb{R}$-raja-arvoille (tai yleensä metristen avaruuksien raja-arvoille). Siis voit tehdä vastauksen täydelliseksi joko kirjoittamalla dominoidun konvergenssin lauseen tässä sovellettavaan muotoon tai todistamalla tässä, että $g(x_n) \to g(x_0)$, kun $x_n \to x_0$, ja todeta sitten [R1:4.2]:n perusteellaa g:n jatkuvaksi.