Mat-1.150 Reaalianalyysi harjoitus 1 vastauksineen ma 27.1.1997 (2 sivua)

Laskuharjoitukset pidetään maanantaisin (27.1.97 alkaen) klo 14–16 salissa U344. Kysymykset (yleensä to), vastaukset (yleensä ma) ja oheismateriaalia saa huoneen U327 ilmoitustaululla olevasta kirjekuoresta. Vanhempi materiaali säilytetään kurssin riippukansiossa Optimin huoneessa (U317).

Tehtävistä tai muista asioista voi esittää kysymyksiä assistentille sähköpostitse (kalle.mikkola@hut.fi) tai vastaanotolla (U327) (tai laskuharjoituksissa); tiedotukset kirjoitetaan otaxin nyyssien ryhmään opinnot.matikka.

Useiden tehtävien perään on sulkuihin merkitty kohta, johon asti kirjaa kannattaa vähintään lukea ennen ko. tehtävän tekemistä. Tätä seuraavat kommentit nopeudesta ja erityisesti helppoudesta ovat tietysti subjektiivisia. Kaikkia tehtäviä kannattaa yrittää. Tätä kurssia on tavallistakin vaikeampi sisäistää laskematta paljon itse.

Numeroituva tarkoittaa tässä kurssissa samaa kuin "enintään numeroituva" eli joukkoa, josta on olemassa injektio joukkoon $\mathbb{N}$. $B_r(x) := \{y \mid d(x,y) < r\}$ $(r > 0)$ on (metriikan d määräämä) x-keskinen r-säteinen (avoin) pallo [R2:1.4]. Pallo-sanan merkitys vaihtelee kirjasta toiseen; yo. merkintä on jossain määrin vakiintunut. Kaavoja edeltävät kvanttorijonot luetaan vasemmalta oikealle, esim. $\forall x \in V\ \exists r > 0\ (B_r(x) \subset V)$ (tavallisin avoimen joukon määritelmä metrisessä avaruudessa) tarkoittaa "kaikilla $x \in V$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B_r(x) \subset V$" eli r saa riippua x:stä toisin kuin kaavassa $\exists r > 0\ \forall x \in V\ (B_r(x) \subset V)$ (jonka $\mathbb{R}^n$:ssä toteuttavat vain $\emptyset$ ja $\mathbb{R}^n$).

Tehtävä 1.1 ([1.3] ([1.11]) *helppo, nopeahko*):
Olkoon $X = \{a,b,c,d\}$ ja $\mathcal{T} = \{\emptyset,\ X,\ \{a\},\ \{a,b\},\ \{a,b,c\}\}$. (a) Onko $\mathcal{T}$ on X:n topologia? (b) Onko $\mathcal{T}$ σ-algebra? (c) Jos b-kohdan vastaus on ei, mikä on pienin σ-algebra $\mathfrak{M}$, joka sisältää $\mathcal{T}$:n. (Huom.: $\mathfrak{M}$ on avaruuden $(X,\mathcal{T})$ Borel-σ-algebra [1.11].) (d) Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ funktio $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$. Onko f jatkuva, kun $\mathbb{R}$ varustetaan tavanomaisella topologiallaan? (e) Onko f mitallinen $\mathfrak{M}$:n suhteen? (Ts. onko f Borel-mitallinen?)

Vastaus: (a) On, ts. määritelmän [R2:1.2] ehdot toteutuvat:
(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. (ii) Jos $V_1, ..., V_n \subset \mathcal{T}$, niin $V_1 \cap ... \cap V_n$ on selvästi (inkluusion suhteen) pienin joukoista V_i, joka on siis $\mathcal{T}$:n jäsen (tämän kohdan helppous johtuu siis siitä, että $\mathcal{T}$:n alkiot sattuvat olemaan sisäkkäisiä). (iii) Jos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \mathcal{T}$, niin $\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ on suurin joukoista V_α, joka siis on $\mathcal{T}$:n jäsen.
(b) Ei. $\{a\} \in \mathcal{T} \wedge \{a\}^c = \{b,c,d\} \notin \mathcal{T}$, joten $\mathcal{T}$ ei ole σ-algebra.
(c) $\{b\} = \{a,b\} \setminus \{a\} \in \mathfrak{M}$ [R2:1.6], $\{c\} = \{a,b,c\} \setminus \{a,b\} \in \mathfrak{M}$ ja $\{d\} = \{a,b,c\}^c \in \mathfrak{M}$. Koska kaikki X:n osajoukot ovat näiden äärellisiä yhdisteitä, $\mathcal{P}(X) \subset \mathfrak{M}$ (ts. kaikki X:n osajoukot ovat mitallisia ($\mathfrak{M}$:n suhteen, siis Borel-mitallisia)). Toisaalta aina $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$, joten $\mathcal{P}(X) = \mathfrak{M}$. ($\mathfrak{M}$ on σ-algebra [R2:1.10]:n perusteella; tosin ehdot [1.3] olisi helppo tarkistaa.)
(d) Ei [1.2c]. $f^{-1}]3,5[:= \{x \in X \mid f(x) \in]3,5[\} = \{d\} \notin \mathcal{T}$, siis erään avoimen joukon alkukuva ei ole avoin.
(e) Kyllä [1.3c]. Kaikkien joukkojen $A \subset \mathbb{R}$ alkukuvat ovat X:n osajoukkoja, siis $\mathfrak{M}$:n alkioita; erityisesti avointen joukkojen alkukuvat ovat $\mathfrak{M}$:n alkioita.

Tehtävä 1.2 ([1.3] *nopeahko*):
Todista seuraavat väitteet oikeiksi tai vääriksi:

(a) Funktio on f jatkuva joss[1] jokaisen suljetun joukon F alkukuva $f^{-1}F$ on suljettu.
(b) Funktio on f jatkuva joss jokaisen suljetun joukon F alkukuva $f^{-1}F$ on mitallinen.

Vastaus: Olkoon tutkittava funktio $f : X \to Y$. $G \subset_\circ X$ tarkoittakoon, että $G \in \mathcal{T}_X$ (G on avoin X:ssä) ja $F \subset_c X$ tarkoittakoon, että $F^c \in \mathcal{T}_X$ (F on suljettu X:ssä). Tarkoittaahan suljettu joukko avoimen joukon komplementtia [R2:1.11], siis $F \subset_c X \iff F^c \subset_\circ X$. Funktio $f : X \to Y$ on jatkuva ($f \in \mathcal{C}(X,Y)$) joss $\forall G \in \mathcal{T}_Y$ $(f^{-1}G \in \mathcal{T}_X)$ [1.2].
(a) Oikein: 1° Jos $F \subset_c Y$ eli $G := F^c \subset_\circ Y$, niin $f^{-1}(F) = f^{-1}(G^c) = (f^{-1}G)^c \subset_c X$ (koska $f^{-1}G \subset_\circ X$).
2° Jos $\forall F \subset_c Y$ $(f^{-1}F \subset_c X)$ ja $G \subset_\circ Y$, niin $G^c \subset_c Y$ ja siis $(f^{-1}G)^c = f^{-1}(G^c) \subset_c X$, joten $f^{-1}G \subset_\circ X$.
(b) Väärin: f:n jatkuvuus vaatii mm. $\mathcal{T}_X$:n ja $\mathcal{T}_Y$:n olemassaoloa; suljettujen joukkojen alkukuvien mitallisuus mm. $\mathcal{T}_Y$:n ja $\mathfrak{M}_X$:n olemassaoloa, niinpä toinen käsitteistä voi olla määritelty (tosi tai epätosi), vaikkei toinen olisi.[2]
Varmuuden vuoksi esitetään vielä vastaesimerkki, jossa f on jatkuva mutta erään suljetun joukon alkukuva ei ole suljettu:
$Y := \{0,1\}$, $\mathcal{T}_Y := \mathcal{P}(Y) := \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, Y\} =: \mathcal{T}_X$, $X := \{0,1\}$, $\mathfrak{M}_X := \{\emptyset, X\}$, $f(0) := 0$ ja $f(1) := 1$. Joukko $\{1\}$ on suljettu Y:ssä, koska $\{1\}^c = \{0\} \in \mathcal{T}_Y$, mutta $f^{-1}\{1\} = \{1\} \notin \mathfrak{M}_X$.

Tehtävä 1.3 ([1.6] *helppo, nopea*):
Todista oikeaksi tai vääräksi:
Olkoot joukot $A_1, ..., A_n$ mitallisia ja pistevieraita sekä $\cup_{k=1}^n A_k = X$. Olkoot $f_k : X \to Y$ mitallisia. Määritellään $f(x) = f_k(x)$, kun $x \in A_k$ $(k = 1, ..., n)$. Todista, että f on mitallinen $(X \to Y)$. (Aloita tapauksella $n = 2$.)

[1] joss:="jos ja vain jos"=iff
[2] Jos sana jatkuva korvattaisiin sanalla mitallinen, väite olisi tosi, mikä todistettaisiin suunnilleen kuten (a):ssa (koska mitallisten komplementit ovat mitallisia).

Vastaus: Huom.: Oletuksiin sisältyy implisiittisesti, että X:ssä on määritelty mitalliset joukot ($\mathfrak{M}$) ja Y:ssä avoimet joukot ($\mathcal{T}$) (muutoinhan ei voitaisi puhua f_k:iden mitallisuudesta.
(a) $n = 2$ (vain malliksi): Olkoon $V \in \mathcal{T}_Y$. $x \in f^{-1}V$ joss $f(x) \in V$ joss $(x \in A_1 \wedge x \in f_1^{-1}V) \vee (x \in A_2 \wedge x \in f_2^{-1}V)$ joss $x \in (A_1 \cap f_1^{-1}V) \cup (A_2 \cap f_2^{-1}V)$. Siis $f^{-1}V = (A_1 \cap f_1^{-1}V) \cup (A_2 \cap f_2^{-1}V)$, joka on selvästi mitallinen. (Piirrä kuvat ja/tai tee itse perässä, niin ymmärrät.) (Tätä sovellettiin äänettömästi [R2:1.9]:n todistuksessa.)

(b) Yleinen tapaus: Olkoon $V \in \mathcal{T}_Y$. $x \in f^{-1}V$ joss $f(x) \in V$ joss $(x \in A_k \wedge x \in f_k^{-1}V)$ jollain $k \in \{1, ..., n\}$ joss $x \in \cup_{k=1}^n (A_k \cap f_k^{-1}V)$. Siis $f^{-1}V = \cup_{k=1}^n (A_k \cap f_k^{-1}V) \in \mathfrak{M}$. (Huom.: aivan samalla todistuksella nähdään, että joukkoja A_k saisi olla numeroituvakin määrä.)

Jos $Y = \mathbb{C}$ (tai muu vektoriavaruus) tehtävän voi laskea nopeamminkin: χ_{A_k} on mitallinen, koska $A_k \in \mathfrak{M}$ [R2:1.9d]. Nyt funktion $f = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k} f_k$ mitallisuus seuraa kohdasta [R2:1.9c].

Tehtävä 1.4 ([1.11] *triviaali*):
Osoita, että väli $[1, 2[\subset \mathbb{R}$ on Borel-joukko. (Tässä tietysti $\mathbb{R}$ ajatellaan varustetuksi tavanomaisella topologiallaan; tälläisiä selvinä pidettyjä asioita ei jatkossa aina mainita.)

Vastaus: $[1, 2[=]-\infty, 2[\setminus]-\infty, 1[\in \mathfrak{M}_{Borel}$ [1.6d], koska $\mathcal{T} \subset \mathfrak{M}_{Borel}$, koska Borel-joukot ovat pienimmän $\mathcal{T}$:n sisältävän σ-algebran joukot.

Tehtävä 1.5 ([1.4] *pitkähkö*):
Antavatko seuraavat määritelmät saman $\mathbb{R}^k$:n topologian?

(a) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss se on avointen pallojen numeroituva yhdiste.
(b) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss se on avointen n-ulotteisten kuutioiden ($C_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^k \mid |x_i - y_i| < r \ (i = 1, ..., k)\}$) numeroituva yhdiste.

Huom.: luonnollisesti nollan joukon yhdiste eli "tyhjä yhdiste"(eli tyhjä joukko) toteuttaa annetun ehdon.

Vastaus: Ne antavat saman topologian kuten myös seuraavat:
(c) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss jokainen $x \in V$ kuuluu johonkin V:n sisältämään x-keskiseen avoimeen palloon (eli $\forall x \in V \ \exists r > 0 \ (B_r(x) \subset V)$).
(d) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss se on avointen pallojen (mielivaltainen) yhdiste.
Siis ko. topologia on sama kuin $\mathbb{R}^k$:n tavanomainen topologia (kohta d) eli metriikan d ($d(x, y) := |x - y|$) määräämä topologia. Seuraavassa todistamme $\mathcal{T}_a = \mathcal{T}_b = \mathcal{T}_c = \mathcal{T}_d$, (pelkän $\mathcal{T}_a = \mathcal{T}_b$ todistaminen ei olisi paljon tätä lyhyempi).

1° Triviaalisti $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{T}_d$.

2° $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_c$ (ts. $V \in \mathcal{T}_d \implies V \in \mathcal{T}_c$). Tod.: Olkoon $V \in \mathcal{T}_d$. Tällöin V on muotoa $\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_{r_\alpha}(x_\alpha)$. Jos siis $x \in V$, niin $\exists \alpha_0 \in \mathcal{A}$ s.e. $x \in B_{r_{\alpha_0}}(x_{\alpha_0})$. Olkoon $r := r_{\alpha_0} - |x - x_{\alpha_0}| > 0$. Tällöin $B_r(x) \subset B_{r_{\alpha_0}}(x_{\alpha_0}) \subset V$. Koska $x \in V$ oli mielivaltainen, $V \in \mathcal{T}_c$.

3° $\mathcal{T}_c \subset \mathcal{T}_a$. Tod.: $\mathcal{B} := \{B_r(q) \mid r \in \mathbb{Q}_+ \wedge q \in \mathbb{Q}^k \wedge B_r(q) \in V\} \preceq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^k \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$, eli perhe $\mathcal{B}$ on numeroituva.[3] Jos $x \in \cup\mathcal{B}$, niin $x \in B_r(q) \subset V$ joillain r, q; siis $\cup\mathcal{B} \subset V$. Jos sitten $x \in V$, niin (koska $V \in \mathcal{T}_c$) $B_R(x) \subset V$ jollain $R > 0$. Valitaan $r \in \mathbb{Q}_+$ s.e. $r < R/2$. Valitaan $q \in \mathbb{Q}^k$ s.e. $|x - q| < r$ (esim. $|q_i - x_i| < r/k \ \forall i$). Tällöin $y \in B_r(q) \Rightarrow |y - x| \le |y - q| + |q - x| < 2r < R \Rightarrow y \in B_R(x)$, siis $x \in B_r(q) \subset B_R(x) \subset V$. Niinpä $B_r(q) \subset \mathcal{B}$ ja siis $x \in \mathcal{B}$. Koska $x \in V$ oli mielivaltainen, $V \subset \cup\mathcal{B}$. Ergo $V \in \mathcal{T}_a$.

Kohtien 1°, 2° ja 3° perusteella $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_c = \mathcal{T}_a$. On siis enää todistettava $\mathcal{T}_b$ ekvivalentiksi näiden kanssa.

4° Helpolla laskulla nähdään, että $B_r(x) \subset C_r(x)$ ja $C_r(x) \subset B_{kr}(x)$. Näiden avulla nähdään, että $\mathcal{T}_c = \mathcal{T}_{c'}$, missä $\mathcal{T}_{c'}$:ssa sana pallo korvataan sanalla kuutio (ja $B_r(x)$ merkinnällä $C_r(x)$). $\mathcal{T}_{c'} \subset \mathcal{T}_b$ todistetaan kuten 3°; $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{c'}$ (mistä seuraa $\mathcal{T}_a = \mathcal{T}_b = \mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{c'} = \mathcal{T}_c$) todistetaan seuraavasti:
Olkoon $V \in \mathcal{T}_b$. Tällöin $V = \cup_{n \in \mathbb{N}} C_{r_n}(x_n)$. Jos $x \in V$, niin jollain N on $x \in C_{r_N}(x_N)$. $r := \min_{i=1,...,k}\{r_N - |x_i - (x_N)_i|\} > 0$, jolloin $C_r(x) \subset C_{r_N}(x_N)$, joten $C_r(x) \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} C_{r_n}(x_n) = V$. Koska $x \in V$ oli mielivaltainen, $V \in \mathcal{T}_{c'}$, QED.

Huom.: $\mathbb{R}^1$:ssä myös seuraavat on ekvivalentti määritelmien (a)–(d) kanssa:
(e) Joukko $V \subset \mathbb{R}^1$ on avoin joss se on avointen välien numeroituva pistevieras yhdiste (ts. $V = \uplus_{n \in \mathbb{N}} I_n$, missä jokainen I_n on avoin väli (ja $n \ne m \Rightarrow I_n \cap I_m = \emptyset$)).
Tämä todistetaan syksyn 1994 ReA:n laskuharjoituksessa 1.2 merkitsemällä jokaisella $q \in \mathbb{Q} \cap V$ symbolilla I_q kaikkien niiden avointen välien yhdistettä, joihin q kuuluu, sekä osoittamalla, että I_q on avoin väli, $I_q \ne I_{q'} \Rightarrow I_q \cap I_{q'} = \emptyset$ ja $V = \cup_{q \in \mathbb{Q}} I_q$.

[3] $A^n \approx A \approx A \times B \approx A \cup B$, kun $A \succeq B \wedge A \succeq \mathbb{N}$.