Teknillinen korkeakoulu — Staffans / Mikkola

Mat-1.150 Reaalianalyysi
Välikoe 2 / 15.12.1994 vastauksineen

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävät kannattaa laskea alkaen helpoimmasta/nopeimmasta. Kirjan kaikkia tuloksia saa käyttää hyväkseen, joskin tällöin on hyvä kertoa ko. lauseen oletukset (ja osoittaa niiden toteutuvan, ellei se ole itsestään selvää; jos olet epävarma, niin selitä mieluummin liikaa, mikäli aika riittää; näin myös vältyt soveltamasta lauseita silloin, kun niitä ei voi soveltaa). Lauseen nimeä tai numeroa ei tarvitse muistaa, kunhan esität lauseen oletuset (ja seuraukset) niin, että lauseen voi niistä tunnistaa (esim.: "$f \in \mathcal{C}(X,Y) \wedge K \subset_K X \Rightarrow fK \subset_K Y$"tai "kompaktin joukon jatkuva kuva on kompakti"tms.); tämäkään ei yleensä ole keskeisintä tehtävissä.

Tehtävä 1. Olkoon $H = \{f \mid f$ on (nollamitallisessa joukossa toisistaan eroavien) Lebesgue-mitallisten funktioiden $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ ekvivalenssiluokka ja $\int_0^\infty e^{-x}|f(x)|^2\,dx < \infty\}$.
a) Osoita, että

$$(f,g) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)\overline{g(x)}\,dx < \infty$$

määrittelee H:ssa sisätulon (kaikkien Rudinin lauseiden käyttö on todellakin sallittu).
b) Funktiot e^{-x} ja xe^{-x} kuuluvat tähän avaruuteen (ei tarvitse osoittaa) ja virittävät kaksiulotteisen aliavaruuden. Esitä jokin tämän aliavaruuden ortonormeerattu kanta.

Vastaus: (Arvostelu: 3p/kohta. Huom.: tehtävien vastauksissa esiintyvät "[R2:1.29]-tyylisten viitteiden sijaan kelpaisi "[R2]"(ts. lauseiden numeroiden muistaminen ei ole tarpeen).)
a) $\mu(E) := \int_E e^{-x}\,dm$ kaikilla $\mathbb{R}_+$:n Lebesgue-mitallisilla osajoukoilla $E \in \mathfrak{M}$, jolloin μ on positiivinen mitta (koska e^{-x} on mitallinen ja ei-negatiivinen) [R2:1.29]. $L^2(\mu)$ on Hilbert-avaruus [R2:4.5b] varustettuna sisätulolla

$$(f,g)_2 := \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x) \overset{*}{=} \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}\,dx = (f,g).$$

(*: [R2:1.29]:n mukaan tämä pätee mitallisille $[0,\infty]$-funktioille, joten $|f\bar{g}|, f\bar{g} \in L^1(\mu)$ [Hölder]. Niinpä integraali on määritelty ([R2:1.31]: neljän osansa integraalien “summa”; [R2:1.29]:n mukaan $\int(\Re f(x)\bar{g}(x))^+\,d\mu(x) = \int(\Re f(x)\bar{g}(x))^+ e^{-x}\,dx$, muut osat vastaavasti, joten yhtäsuuruus pätee (kuten muillakin $L^1(\mu)$-funktioilla)).)

$L^2(\mu)$:n alkiot (mitallisten $\mathcal{L}^2(\mu)$-funktioiden ekvivalenssiluokat) ovat samoja kuin H:n alkiot, sillä $f_1 = f_2$ m.k.$[\mu] \iff f_1 = f_2$ m.k.$[m]$, koska $\mu(E) = 0 \iff m(E) = 0$, koska $0 = \mu(E) = \int_E e^{-x}\,dx \iff e^{-x} = 0$ m.k. $x \in E \iff m(E) = 0$ koska $e^{-x} > 0$ [R2:1.39b] (tästä myös seuraa, että em. sisätulo on hyvin määritelty (ei riipu f:n ja g:n jäsenistä, koska $\mu \ll m$)).

Siis H:n alkiot ovat samat kuin $L^2(\mu)$:n alkiot, ja $(f,g) = (f,g)_2$ $\forall f,g \in H = L^2(\mu)$, joten (f,g) on sisätulo (koska $(f,g)_2$ on).

b) Nyt on löydettävä $u_k \in \operatorname{span}(\{e^{-x}, xe^{-x}\})$ $(k = 1,2)$ s.e. $(u_j, u_k) = \chi_{j=k}$ $(j,k \in \{1,2\})$. $\int_0^\infty e^{-3x}\,dx = 1/3$, $\int xe^{-3x} = 1/9$ ja $\int x^2e^{-3x} = 2/27$. Niinpä $(\sqrt{3}e^{-x}, \sqrt{3}e^{-x}) = 1$. Valitaan $u_1 = \sqrt{3}e^{-x}$.
Olkoon $u_2 := \alpha xe^{-x} + \beta e^{-x}$. Jotta olisi

$$0 = (u_1, u_2) = \alpha\sqrt{3}(xe^{-x}, e^{-x}) + \beta\sqrt{3}(e^{-x}, e^{-x}) = \sqrt{3}(\alpha/9 + \beta/3),$$

on oltava $\alpha = -3\beta$. Jotta olisi

$$1 = (u_2, u_2) = \alpha^2 2/27 + 2\alpha\beta 1/9 + \beta^2 1/3 = \beta^2/3,$$

on oltava $\beta = \pm\sqrt{3}$. Siis esim. $u_1 = \sqrt{3}e^{-x}$, $u_2 = -3\sqrt{3}xe^{-x} + \sqrt{3}e^{-x}$ (muitakin on).

Kommentteja: a) Em. vastaus ei tietenkään ole ainoa, mutta jollain tavalla on osoitettava (mm.), että sisätulo on hyvin määritelty ($(f,g) \in \mathbb{C}$ (esim. Hölder $\Longrightarrow (fe^{-x/2})(ge^{-x/2}) \in L^1$) ja riippumaton edustajien valinnoista) sekä $(f,f) = 0 \iff f = 0$ (tässä 0 on nollafunktion ekvivalenssiluokka).
$\overline{\int h} = \int \bar{h}$, mikä nähdää suoraan (kompleksisen) L^1-funktion integraalin määritelmästä [R2:1.31]. Tästä on apua, jos todistaa sisätulon ominaisuudet itse.
Tehtävän m.k. tarkoittaa luonnollisesti m.k.$[m]$.
b) Yksikkövektori u_1 voidaan valita vapaasti Hilbert-avaruudesta (koska sellaisen suljettu aliavaruus) $\operatorname{span}(\{e^{-x}, xe^{-x}\})$, koska jokainen ortonormaali joukko voidaan täydentää ortonormaaliksi kannaksi [R2:4.22] (tätä ei tarvitse tietää, riittäähän toki, että löytää parin u_1, u_2). Vektori u_2 olisi voitu kertoa jollain vakiolla α, missä $|\alpha| = 1$.

Tehtävä 2. Olkoon f absoluuttisesti jatkuva 2π-jaksoinen funktio. Osoita, että f:n Fourier-kertoimet $\hat{f}(n)$ toteuttavat ehdon

$$\lim_{|n|\to\infty} n\hat{f}(n) = 0.$$

Vastaus:

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\,dt \overset{teht 9.5b}{=} \frac{1}{2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}(-in)\,dt$$

$$= 0 + (in)\hat{f}(n).$$

Siis $n\hat{f}(n) = -i\widehat{f'}(n) \to 0$, koska $f' \in L^1(T) \Rightarrow \widehat{f'} \in c_0(\mathbb{N})$ [R2:5.15].

Kommentteja: Huom.: $\mathcal{C}^1(T)$-funktioille tämä on todistettu laskuharjoituksissa, se siis on tämän erikoistapaus.
Huom.: $\|h\|_{L^1(T)} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\,dt$; ilman tätä $\frac{1}{2\pi}$-skaalausta yo. tod. vaatisi ϵ:n korvausta $\epsilon/2\pi$:llä tms.

Tehtävä 3. Määrittele käsitteet

(a) Kompleksiarvoinen mitta (kompleksimitta, *complex measure*) μ.
(b) Mitan μ kokonaisvariaatiomitta (kokonaisheilahtelumitta, *total variation measure*) $|\mu|$.
(c) Mitan μ absoluuttinen jatkuvuus (absolute continuity) Lebesguen mitan suhteen.

Vastaus: (Arvostelu: 2p/kohta.)
a) Funktio $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$, missä $\mathfrak{M}$ on jokin σ-algebra jossain joukossa X, on kompleksimitta, jos kaikilla $E \in \mathfrak{M}$ pätee $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, kun $\{E_i\}$ on jokin E:n mitallinen ositus.

b) Jos μ on kompleksimitta, niin sen kokonaisvariaatiomitta $|\mu|$ on funktio

$$E \mapsto |\mu|(E) := \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|,$$

missä supremum otetaan kaikkien E:n mitallisten ositusten $\{E_i\}$ yli.

c) Jos μ on $\mathbb{R}^k$:n (tai jonkin sen mitallisen osajoukon) Borelin tai Lebesguen σ-algebran positiivinen tai kompleksinen mitta, niin μ on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan m suhteen, jos $m(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$.

Kommentteja: a)&b): [R2:6.1] Huom.: $|\mu|$ on äärellinen positiivinen mitta [R2:6.2,6.4]. c): [R2:6.7] (merk. $\mu \ll m$, tästä seuraa, että $d\mu = f\,dm$ jollain $f \in L^1(m)$ [6.10]).

Tehtävä 4. Olkoon $\mathcal{B}_k$ avaruuden $\mathbb{R}^k$ Borelin σ-algebra. Osoita, että $\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{m+n}$, kun $m, n \in \mathbb{N}_+$.

Vastaus: (Arvostelu: $\subset$ 3p, $\supset$ 3p.) Ks. teht. 10.5 (tulosta $V = \cup_{q \in V \cap \mathbb{Q}^k} Q_{r_q}(q)$ tms. ei saa käyttää todistamatta, sen todistuksen osuus on 1p (jos käytetään)).