Mat-1.150 Reaalianalyysi
Välikoe 1 / 7.11.1994 korjatuin vastauksin 14.11.94, sivu 1/2.

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävät kannattaa laskea alkaen helpoimmasta. Kirjan tuloksia saa toki käyttää hyväkseen, paitsi sellaista tulosta, jota pyydetään todistamaan.

Tehtävä 1. Olkoon $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jono mitallisia funktioita $X \to \mathbb{C}$ s.e. $\sum_{k=1}^{\infty}\int_X |h_k|\,d\mu < \infty$. Määritellään $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} h_k(x)\ \forall x$. Määritellään $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ niillä x, joilla tämä raja-arvo on olemassa. Osoita, että

(a) f:n määrittelyjoukko D_f on mitallinen,
(b) $\mu(D_f^c) = 0$.
(c) Miten pitäisi tulkita $\int_X |f|\,d\mu$ ja $\int_X f\,d\mu$ (jos kerran f ei välttämättä ole kaikkialla määritelty)?
(d) Osoita, että $\int_X |f|\,d\mu < \infty$ ja $\int_X f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_X h_k\,d\mu$.

Vastaus: (Arvostelu: 1.5p/kohta. [R2:1.38] on suurin piirtein b–d, joten sitä ei saa käyttää, sen sijaan [R2:1.27] on OK; sovellettavien lauseiden numeroita ei tietenkään tarvitse muistaa, kunhan jotenkin antaa ymmärtää, mistä lauseesta on kyse (ellei käy selvästi ilmi asiayhteydestä). Tässä kokeessa kaikki tehtävät olivat <u>melko</u> vaikea, mikä huomioidaan tulevassa arvosanaskaalassa.)
(a) $D_f := \{x \mid \exists \lim_n f_n(x)\}$.
1° $f_n(x)\in\mathbb{R}\ \forall n, x$: $F := \limsup_n f_n - \liminf_n f_n \in \mathfrak{L}$ [R2]. $D_f = F^{-1}\{0\} \in \mathfrak{M}$.
2° Yleinen tapaus: Triviaalisti $D_f = D_{\Re f}\cap D_{\Im f} \in \mathfrak{M}$ [1°]. ////

(Huom.: jos todistat ensin, että $D_f^c \subset N$, missä $\mu(N)=0$, niin päättely $D_f^c \in \mathfrak{M} \wedge \mu(D_f^c)=0$ (mistä seuraa, että $D_f = (D_f^c)^c \in \mathfrak{M}$) on oikeutettu vain, jos μ tiedetään täydelliseksi; tätä ei nyt tiedetä.)

Lauseesta [R2:1.14] ei ole tässä apua, sillä se vaatisi tietoa siitä, että $\exists \lim_n f_n(x)\ \forall x$, mikä ei välttämättä päde. Sen sijaan, jos tiedettäisiin *ennalta* D_f mitalliseksi, niin voitaisiin todeta joukon $\{E\in\mathfrak{M} \mid E\subset D_f\}$ olevan σ-algebra joukossa D_f ja funktioiden $f_n|_{D_f}$ olevan tämän suhteen mitallisia ja soveltaa lausetta [R2:1.14] joukkoon D_f. Kun (a) on todistettu, yo. päätelmä todistaa $f|_{D_f}$:n olevan mitallinen; sama nähdään helpommin seuraavasti (b-kohdan jälkeen): $g_n := f_n\chi_{D_f}$, $g := f\chi_{D_f}$, jolloin $g_n(x)\to g(x)\ \forall x$ ja siis $g\in\mathfrak{L}$ [R2:1.14]. $f = g \wedge f_n = g_n$ joukossa D_f, siis m.k. Niinpä c- ja d-kohtien integraaleissa ei ole ongelmia mitallisuuden suhteen. Näitä (pienellä kirjoitettuja) mitallisuustodistuksia ei kuitenkaan vaadittu, sillä kukaan kokeen kuudesta osanottajasta ei ollut tutkinut asiaa.

(b) & (d) Ks. lauseen [R2:1.38] todistus.

(c) Tapa 1: $\int_X f\,d\mu := \int_{D_f} f\,d\mu$ (järkevää, koska pätee "oikeilla funktioilla" $f\in L^1$).
Tapa 2: $\int_X f\,d\mu := \int_X h\,d\mu$, missä $h = f$ m.k. ja h on mitallinen "oikea funktio" (järkevää, koska pätee mitallisilla f ja on riippumaton h:n valinnasta).
Em. määritelmät yhtyvät (esim. $h := f\chi_{D_f}$). $|f|$ vastaavasti.

Tehtävä 2. Olkoon f funktio $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Osoita seuraavat ehdot yhtäpitäviksi:

(a) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ joukko $\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)<\alpha\}$ on avoin;
(b) $\forall x\in\mathbb{R}$ pätee $f(x) \geq \limsup_{y\to x} f(y) := \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{|y-x|<1/n} f(y)$.

Millä nimellä tällaiset funktiot tunnetaan?

Vastaus: (Arvostelu: a=2.5p, b=2.5p, y.pj.=1p).
Ehdon (a) (tai (b)) täyttäviä funktioita sanotaan ylhäältä puolijatkuviksi.
Merkitään $A_\alpha := \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)<\alpha\}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.
(a)⇒(b): <u>Tod.:</u> Vastaoletus: $f(x) < a := \limsup_{y\to x} f(y)$ jollain x.
$\beta := \frac{a+f(x)}{2} < a$. $x\in A_\beta \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}$, joten $\exists r>0$ s.e. $B_r(x)\subset A_\beta$, joten $\limsup_{y\to x} f(y) \leq \beta < a = \limsup_{y\to x} f(y)$ RR. ////

(b)⇒(a): <u>Tod.:</u> Vastaoletus: Jollain a joukko A_a ei ole avoin, ts. on olemassa $x\in A_a\setminus A_a^o$. Tällöin on olemassa jono $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset A_a^c$ (ts. $f(y_k)\geq a\ \forall k$) s.e. $y_k\to x$, joten jokaisessa $B_{1/n}(x)$ on jokin y_k (peräti kaikki jostain $K\in\mathbb{N}$ alkaen) ja siis $\sup_{y\in B_{1/n}(x)} f(y)\geq a\ \forall n$, joten $\limsup_{y\to x} f(y) \geq a > f(x)$ RR. ////

Kommentteja: Koska epätyhjillä $[-\infty,\infty]$:n osajoukoilla on olemassa aina inf ja sup, (b)-kohdan $\limsup \in [-\infty,\infty]$ on olemassa. Huom.: Selvästi $\lim_{n\to\infty}\sup_{|y-x|<1/n} f(y) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{|y-x|<1/n} f(y) = \inf_{r>0}\sup_{|y-x|<r} f(y) = \inf_{r>0}\sup_{y\in B_r(x)} f(y)$ on pienin luvuista $\liminf_{n\to\infty} f(y_n)$, missä $y_n\to x$, eli pienin luvuista $\liminf_{n\to\infty} f(y_n)$, missä $y_n\to x \wedge \exists\lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Niinpä ei liene epäselvyyttä määritelmän "oikeellisuudesta". Funktion $x\mapsto \limsup_{y\to x} f(y)$ mahdollinen mitallisuus ei seuraa f:n (mahdollisesta) mitallisuudesta ainakaan suoraan, sillä tässähän otetaan infimumia ylinumeroituvasta joukosta.

Tehtävä 3. Olkoon $L^1 = L^1(X)$, missä $X=[0,1]$ varustettuna tavallisella Lebesguen mitalla. Osoita, että

(a) Jokainen $f\in L^1$ voidaan L^1-approksimoida yksinkertaisella funktiolla s, eli jokaiselle $\epsilon>0$ löytyy yksinkertainen funktio s s.e. $\|f-s\|_1<\epsilon$.
(b) Jokainen yksinkertainen funktio s voidaan L^1-approksimoida jatkuvalla funktiolla h.
(c) Jokainen $f\in L^1$ voidaan L^1-approksimoida jatkuvalla funktiolla.

Vastaus: (Arvostelu: 2p/kohta.) a&b: Ks. [R2:3.13,3.14]. c-kohta: $||f-s||_1 < \epsilon/2 \wedge ||s-h||_1 < \epsilon/2 \Rightarrow ||f-h||_1 < \epsilon$.

Kommentteja: Yksinkertainen funktio ei välttämättä ole Riemann-integroituva (jos esim. $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ja $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ on välin $[0,1]$ ositus, niin jokaisella välillä $]x_k, x_{k+1}[$ on $\sup f = 1$ ja $\inf f = 0$, joten yläsumma on aina 1 ja alasumma 0). Missään tapauksessa ei pidä olettaa, että yksinkertaisen funktion "portaat"olisivat välejä; nehän voivat olla mitä tahansa mitallisia joukkoja.

Tehtävä 4. Formuloi ja todista yksi ja vain yksi seuraavista epäyhtälöistä:

(a) Jensenin epäyhtälö,
(b) Hölderin epäyhtälö,
(c) Minkovskin epäyhtälö.

Vastaus: (Arvostelu: Lause 3p, tod. 3p.) Ks. [R2]. Huom.: lauseissa vaaditaan f mitalliseksi, b:ssä ja c:ssä lisäksi $[0,\infty]$-arvoiseksi (kompleksisilla g lauseita onkin tapana soveltaa $|g|$:hen) (sen sijaan mitään $||f||_p < \infty$-tyylin vaatimuksia lauseissa ei ole). (Minkovski on ainoa, jonka olisin itse saanut varmuudella todistettua lyhyessä ajassa, muut vaatinevat ulkoa opettelua.)