Teknillinen korkeakoulu — Staffans / Mikkola

Mat-1.150 Reaalianalyysi
Tentti 7.3.1995

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävä 1. Olkoon X metrinen avaruus, jonka topologia $\mathcal{T}$ on myös σ-algebra (eli avoimien joukkojen perhe $\mathcal{T}$ on σ-algebra). Osoita, että X on diskreetti eli että kaikki X:n osajoukot ovat avoimia. (Vihje: Tutki x-keskisten pallojen leikkauksia.)

Tehtävä 2. Olkoon μ X:n positiivinen mitta. Olkoon $\{f_n\}$ jono mitallisia funktioita $X \to \mathbb{C}$. Sanomme, että jono $\{f_n\}$ suppenee kohti funktiota f *mitassa* (μ) (tai *(μ-)mitallisesti*), jos $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.e.

$$n \geq N \implies \mu\left(\{x \,\big|\, |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\right) < \epsilon.$$

Olkoon $\mu(X) < \infty$. Todista:
a) Jos $f_n \to f$ m.k., niin $f_n \to f$ mitassa.
b) Jos $f_n \to f$ mitassa, niin jokin alijono $f_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} f$ m.k..

Tehtävä 3. Sovelletaan Lebesguen integraalin peruslauseita reaaliarvoisiin tai kompleksiarvoisiin funktioihin, jotka on määritelty joukossa $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$. Käytetään mittana lukumäärämittaa (eli "laskurimittaa") σ. Formuloi seuraavat lauseet tähän mitta-avaruuteen:

(a) Fatoun lemma (reaaliarvoisille funktioille).
(b) Dominoidun konvergenssin lause (kompleksiarvoisille funktioille).
(c) Fubinin lause (kompleksiarvoisille funktioille).

Tehtävä 4. Olkoon $f \geq 0$ absoluuttisesti jatkuva välillä $[0, 1]$. Osoita, että myös f^p absoluuttisesti jatkuva, jos $1 \leq p < \infty$. Hae funktion f^p derivaatta.

Tehtävä 5. Olkoon $f_n(x) = \frac{1}{[n \sin(x/n)]^{1/2}}$. Laske $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ ja perustele vastauksesi.