Teknillinen korkeakoulu Staffans / Mikkola

Mat-1.150 Reaalianalyysi
Tentti 19.12.1994

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, välikokeen numero, päiväys;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Ke,Ko,M,Mk,P,R,S,Tf,Ti,Tu);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Tehtävät kannattaa laskea alkaen helpoimmasta/nopeimmasta. Kirjan kaikkia tuloksia saa käyttää hyväkseen, joskin tällöin on hyvä kertoa ko. lauseen oletukset (ja osoittaa niiden toteutuvan, ellei se ole itsestäänselvää; jos olet epävarma, niin selitä mieluummin liikaa, mikäli aika riittää; näin myös vältyt soveltamasta lauseita silloin, kun niitä ei voi soveltaa). Lauseen nimeä tai numeroa ei tarvitse muistaa, kunhan esität lauseen oletuset (ja seuraukset) niin, että lauseen voi niistä tunnistaa (esim.: "$f \in \mathcal{C}(X,Y) \wedge K \subset_K X \Rightarrow fK \subset_K Y$"tai "kompaktin joukon jatkuva kuva on kompakti"tms.).

Tehtävä 1. Olkoon μ positiivinen funktio mitta-avaruudessa $(X, \mathfrak{M})$. Olkoon $f \geq 0$ mitallinen funktio. Määrittele

$$\int_X f \, d\mu.$$

Esitä myös tarvittavat välivaiheet.

Tehtävä 2. Olkoon $f \in L^1(\mu)$. Todista, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f| \, d\mu < \epsilon$.

Tehtävä 3. Laske $\lim_{n\to\infty} \int_0^5 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \, dx$. (Luonnollisesti vastaus on perusteltava.)

Tehtävä 4. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R})$. Määritellään $f_n(x) = n \int_x^{x+1/n} f(s) \, ds$. Osoita, että
a) f_n on jatkuva $\forall n$.
b) $f_n(x) \to f(x)$ jokaisessa f:n Lebesgue-pisteessä.
c) $f_n \to f$ avaruudessa $L^1(\mathbb{R})$.

Tehtävä 5. Täsmennä ja todista väite "$c_0(\mathbb{N})$:n duaali on $\ell^1(\mathbb{N})$". (Kuten yleensä, $c_0(\mathbb{N}) := \mathcal{C}_0(\mathbb{N})$.)