Mat-1.150 Reaalianalyysi 9. harj. ti 29.11.1994 vastauksineen (2 sivua)

2. välikoe on 15.12.94 klo 16–19 salissa A (taloustieteen tenttien yhteydessä). Koealue on luvut 4–8 (vain käsitellyt osat).

Seuraavassa muutaman *helppoa* harjoitustehtävää laskurutiinin kehittämiseksi (kannattaa laskea (ennen varsinaisia tehtäviä)!) ($I := [a,b]$, AC := AC(I) :="välin I AC-funktiot", BV := BV(I) [R2:Exe7.13]; huom.: Mf ja Lebesgue-pisteiden joukko Leb(f) voidaan määritellä kaikille $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^k)$):
(htll) $\|Mf\|_\infty \le \|f\|_\infty$. (htll) Konstruoi $f \in L^1$ s.e. $0 \notin \mathrm{Leb}(f)$.
(htll) Funktion $f \in L^1$ (jopa L^1_{loc}) jatkuvuuspisteet ovat sen Lebesgue-pisteitä.
(htl) AC ja BV ovat vektoriavaruuksia. (Niinpä ne ovat $\mathcal{L}$:n aliavaruuksia, mikä selviää ao. harjoituksista.)
(htl) $f \in \mathrm{AC} \Rightarrow |f| \in \mathrm{AC} \not\Rightarrow f \in \mathrm{AC}$.
(htl) $f \in \mathrm{BV} \Rightarrow |f| \in \mathrm{BV} \not\Rightarrow f \in \mathrm{BV}$.
(htll) Jos $f : I \to \mathbb{R}$ on monotoninen, niin $f \in \mathcal{L}$.
(htll) Jos $f : I \to \mathbb{C}$ on monotoninen, niin $f \in \mathrm{BV}$.
(ht) Jos $f \in \mathrm{BV}$ on reaalinen, niin $\exists$ rajoitetut monotoniset funktiot g, h s.e. $f = g - h$. (Vihje: ks. [R2:7.19]:n tod.)
(htll) $\mathrm{BV} \subset \mathcal{L}$.
(htll) [R2:Exe7.10] (siis $f \in \mathrm{Lip}_1 \Rightarrow f \in \mathrm{AC} \wedge f' \in L^\infty$).

Lue tehtävä [R2:Exe7.13] (laskeminen ei olisi helppoa).
Huom.: Jos I korvataan avoimella tai äärettömällä välillä, osa tuloksista säilyy, osa muuttuu. Samoin käy, jos em. funktioavaruuksiin liitetään alaliite $_{loc}$.

Huom.: [R2:7.7] pätee kaikille $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^k) := \{f \in L \,\big|\, f|_K \in L^1(K)\ \forall K \subset_K \mathbb{R}^k\}$ (htl), erityisesti kaikille $f \in L^p(\mathbb{R}^k)$ $(1 \le p \le \infty)$ (htl). Tästä on apua tehtävässä 9.6. Seuraavasta lemmasta on hyötyä tehtävässä 9.4.

Lemma 0.0.1 *Olkoon* $g \in \mathcal{L}([0,\infty[;[0,\infty])$. *Tällöin*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(|x|)dx = \int_0^\infty g(r) a_n r^{n-1}\, dr$$

missä a_n *on* $\mathbb{R}^n$*:n yksikköpallopinnan* $(n-1)$*-ulotteinen mitta ("pinta-ala") (r-säteisen* $n-1$*-mitta on* $a_n r^{n-1}$*; ko. pallon "tilavuus" (n-mitta) on* $m(B_r) = v_n r^n$*, missä* $0 < a_n, v_n < \infty$*.)*

Tästä saadaan suoraan ($g(r) := \chi_{]R_1,R_2[} r^{-p}$):

Lemma 0.0.2

$$\int_{R_1<|z|<R_2} |z|^{-p}\, dz = a_n \int_{R_1}^{R_2} r^{-p} r^{n-1}\, dr = \frac{a_n}{n-p}\Big|_{R_1}^{R_2} r^{n-p} \ (p \ne n,\ \ \textit{muutoin}\ a_n \log r)$$

Joten $p < n \iff z^{-p} \in L^1(B_R)$, $\quad p > n \iff z^{-p} \in L^1(B_R^c)$.
Erityisesti $\frac{M}{1+|x|^a} \in L^p$ $\ 1 \le p \le \infty$, *kun* $a > n$.

Tehtävä 9.1 ([7.10] *helppo, nopea*):
[R2:Exe7.1] Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$. Osoita, että $|f(x)| \le (Mf)(x)\ \forall x \in \mathrm{Leb}(f)$.

Vastaus:

$$x \in \mathrm{Leb}(f) \Rightarrow |f(x)| \overset{7.10}{=} \lim_{r\to 0} m(B_r)^{-1} \int_{B_r(x)} |f|\, dm \le \sup_{0<r<\infty} m(B_r)^{-1} \int_{B_r(x)} |f|\, dm =: Mf.$$

Tehtävä 9.2 ([7.21] *helppo,nopea*):

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0; \\ x\sin(\frac{\pi}{x}), & \text{kun } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Osoita, että $g \in \mathcal{C}(I) \setminus \mathrm{BV}(I)$ eli g on jatkuva joukossa $I := [0,1]$, mutta g:n kokonaisheilahtelu $V_g = \infty$.

Vastaus: $g \in \mathcal{C}^\infty(\{0\}^c)$ ja $|g(x) - g(0)| \le |x| < \delta := \epsilon$, joten $g \in \mathcal{C}$.
Osoitetaan, että $V_g > M$ mielivaltaisella $M < \infty$. Valitaan n s.e. $\sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j} > M$. $x_0 =: 0$, $x_n := 1$, $x_j := \frac{1}{n-j+\frac{1}{2}}$ $(j = 1, ..., n-1)$. Tällöin $g(x_j) = x_j \sin((n-j)+\frac{1}{2})\pi = (-1)^{n-j} x_j$.

$$V_g \ge \sum_{j=2}^{n-1} |g(x_j) - g(x_{j-1})| = \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{n-j+1} \overset{i:=n-j+1}{=} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i} > M.$$

Tehtävä 9.3 ([7.21] *helppo, nopea*):
[R2:Exe7.11] Olkoot p ja q konjugaattieksponentteja ja $1 < p < \infty$. Olkoon $f \in \mathrm{AC}([a,b]) \wedge f' \in L^p \wedge \alpha = 1/q$. Todista, että

$$f \in \mathrm{Lip}_\alpha([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \,|\, M_f := \sup_{s \ne t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha} < \infty\}.$$

Vastaus:

$$|f(s) - f(t)| = |\int_t^s f'| \le \|f'\|_{L^p([t,s])} \|1\|_{L^q([t,s])} \le \|f'\|_p |s-t|^{1/q} \Rightarrow M_f \le \|f'\|_p < \infty.$$

Kommentteja: $f \in \mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ ilmaistaan sanomalla "f toteuttaa Lipschitz-ehdon (Hölder-ehdon) vakiolla α". $\mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ on Banach-avaruus normilla $\|f\| := M_f + \sup_x |f(x)|$ [R2:Exe5.11]; $\mathcal{C}^1_b([a,b]) \subsetneq \mathrm{Lip}_1([a,b]) \subsetneq \mathrm{AC}([a,b]) \subsetneq \mathrm{BV}([a,b]) \cap \mathcal{C}([a,b])$ (ht).

Tehtävä 9.4 ([7.5] *keskitasoa, lyhyehkö*):
[R2:Exe7.22] Todista: $f, Mf \in L^1(\mathbb{R}^k) \Rightarrow f = 0$ m.k.

Vastaus: Olkoon $0 \neq f \in L^1$. $f_n := f\chi_{B_n}$, jolloin $|f_n| \to |f|$ monot., joten $\int |f_n| \to \int |f| > 0$ [mon.konv.], joten $0 < \int |f_l| =: a$ jollain l.

$$|x| \geq l \implies B_l \subset B_{2|x|}(x) \implies \frac{1}{m(B_{2|x|})}\int_{B_{2|x|}} |f| \geq \frac{1}{v_k \cdot (2|x|)^k} a = \frac{a}{v_k 2^k}|x|^{-k}.$$

Niinpä ($c := \frac{a}{v_k 2^k}$)

$$\int Mf \geq \int_{B_l^c} Mf \geq \int_{B_l^c} c|x|^{-k} \overset{lemma}{=} c\int_0^\infty \chi_{]l,\infty[} r^{-k} a_k r^{k-1}\, dr = ca_k \int_l^\infty r^{-1}\, dr = \infty.$$

Tehtävä 9.5 ([7.21 *helpohko, nopeahko*):
[R2:Exe7.14] Olkoon $I = [a,b]$. a) Osoita, että $f, g \in \mathrm{AC}(I) \Rightarrow fg \in \mathrm{AC}(I)$. b) Johda tästä osittaisintegrointia koskeva lause.

Vastaus: a) $\sum_j |fg(\beta_j) - fg(\alpha_j)| \leq \sum_j [|f(\beta_j)g(\beta_j) - f(\alpha_j)g(\beta_j)| + |f(\alpha_j)g(\beta_j) - f(\alpha_j)g(\alpha_j)|] \leq \sum_j |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \sup|g| + \sum_j |g(\beta_j) - g(\alpha_j)| \sup |f| < \epsilon$, kun δ valitaan sopivasti...

b) Siis $fg \in \mathrm{AC}$, joten m.k. $\exists (fg)' \in L^1$ ja $fg(t) - fg(s) = \int_s^t (fg)'$ [7.20]. $(fg)' = f'g + fg'$ niillä t, joilla $\exists f'(t), g'(t)$, ts. m.k., joten

$$\Big|_a^x fg \overset{R2:7.20}{=} \int_a^x (fg)' = \int_a^x (f'g + fg') \overset{*}{=} \int_a^x f'g + \int_a^x f'g.$$

((*): $f' \in L^1 \wedge g \in L^\infty \Rightarrow f'g \in L^1$ [Hölder], vastaavasti $fg' \in L^1$.) Niinpä $\int_a^x f'g = \Big|_a^x fg - \int_a^x fg'$, kun $a \leq x \leq b$ ja $f, g \in \mathrm{AC}([a,b])$. Toki voidaan vaihtaa a johonkin $y \in [a,x]$, koska $f, g \in \mathrm{AC}([y,b])$.

Tehtävä 9.6 ([7.21] *vaikea, pitkähkö*):
Tehtävä 6.1b jäi aiemmin kesken. Osoita, että jos $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ ja $\|\tau_h f - f\|_\infty \overset{h\to 0}{\to} 0$, niin $\exists g \in \mathcal{C}_{bu}(\mathbb{R})$ s.e. $f = g$ m.k.

Vastaus: Toteuttakoon f em. ehdon. $f_n(t) := n\int_0^{1/n} f(t+s)\, ds\ \forall t \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
1° $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, koska $n\int_0^{1/n} |f(t+s)|\, ds \leq n\int_0^{1/n} \|f\|_\infty\, ds = \|f\|_\infty$, koska $|f(t+s)| \leq \|f\|_\infty$ m.k. s.

2° $f_n \in \mathcal{C}_{bu}$. Tod.: Valitaan $\delta := \delta_{\epsilon/2} > 0$ s.e. $|h| < \delta \Rightarrow \operatorname{ess\,sup}_t |f(t+h) - f(t)| \leq \epsilon/2$. Jos $|h| < \delta$, niin $\exists N_h$ s.e. $m(N_h) = 0$ ja $\forall t \notin N_h$ ($|f(t+h) - f(t)| \leq \epsilon/2$) (eli $\forall t, s$ ($s \notin N_h - t \Rightarrow |f(t+s+h) - f(t+s)| < \epsilon/2$, siis ao. integraalissa integrandi $\leq \epsilon/2$ m.k. s ($\oplus$), koska $m(N_h - t) = m(N_h) = 0$ [R2:2.20]). Jos $|h| < \delta$, niin

$$|f_n(t) - f_n(t+h)| = |n\int_0^{1/n} f(t+s) - f(t+h+s)\, ds| \leq n\int_0^{1/n} |f(t+s) - f(t+h+s)|\, ds$$
$$\overset{\oplus}{\leq} n\int_0^{1/n} \epsilon/2 = \epsilon/2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Siis f_n on tasaisesti jatkuva (peräti tasaisesti yhtäjatkuva (uniformly equicontinuous)). f_n:n rajoitettuus todettiin kohdassa 1°.

$2\frac{1}{2}°$ $f_n(t) \to f(t)\ \forall t \in \mathrm{Leb}(f)$. Tod.:
$$|f(t) - f_n(t)| = |n\int_0^{1/n} f(t) - f(t+s)\, ds| \leq n\int_0^{1/n} |f(t) - f(t+s)|\, ds \overset{**}{\to} 0\ \forall t \in \mathrm{Leb}(f)$$
[R2:7.20] ($]t, t+1/n[$ nicely shrinking) eli m.k. t [R2:7.7] (koska $f \in L^1_{loc}$).
(**): $\int_0^{1/n} f(t+s)\, ds = \int_t^{t+1/n} f(x)\, dx$, mikä nähdään translatoimalla porrasfunktioita tai kaavasta [R2:s.156(15)].

3° Valitaan $\delta := \delta_{\epsilon/3}$ kuten 2°:ssa. Jos $t, s \in \mathrm{Leb}(f)$, niin $|t-s| < \delta \implies |f(t) - f(s)| < \epsilon$ (ts. f on "melkein tas. jva"), koska kun valitaan n_s ja n_t s.e. $|f(t) - f_n(t)| < \epsilon/3 \wedge |f(s) - f_n(s)| < \epsilon/3$ kun $n \geq n_s, n_t$, niin tällaisilla n on

$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(s)| + |f_n(s) - f(s)| < \epsilon \quad (*).$$

Olkoon $g(t) := f(t)\ \forall t \in \mathrm{Leb}(f)$. Jos $t \notin \mathrm{Leb}(f)$, niin valitaan $t_n \in]t, t+1/n[\cap \mathrm{Leb}(f)$, jolloin $|f(t_n) - f(t_k)| < \epsilon$, kun $n, k > 1/\delta$, joten $\{f(t_n)\}$ on Cauchy-jono ja siis $\exists \lim_n f(t_n) =: g(t)$. Koska g on jatkuva joukossa $\mathrm{Leb}(f)$ [*], vastaavasti $g(t) = \lim_n g(t_n) = \lim_n f(t_n)$ myös $\forall t \in \mathrm{Leb}(f)$. Nyt suunnilleen em. tapaan [*] nähdään, että g on tasaisesti jatkuva ($|t-s| < \delta/3$, n s.e. ... $\Rightarrow |g(t) - g(t_n)| + |g(t_n) - g(s_n)| + |g(s_n) - g(s)| < 3\epsilon$). Selvästi $\sup|g| = \|g\|_\infty = \|f\|_\infty < \infty$, joten $g \in \mathcal{C}_{bu}(\mathbb{R})$, QED.

Tapa2:
3° Arzela–Ascolin lauseen [R2:11.28] mukaan tasaisesti yhtäjatkuva rajoitettu funktiojono sisältää osajonon, joka suppenee johonkin $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ tasaisesti $\mathbb{R}$:n kompakteissa osajoukoissa. Toisaalta $f_n \to f$ m.k. [$2\frac{1}{2}°$], joten em. osajonokin suppenee f:ään m.k., siis $f = g$ m.k.. Näin ollen $\sup|g| = \|g\|_\infty = \|f\|_\infty < \infty$, joten $g \in \mathcal{C}_b$. Jos $|h| < \delta_\epsilon$, niin $\sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t+h) - g(t)| = \|\tau_h g - g\|_\infty = \|\tau_h f - f\|_\infty < \epsilon$, joten $g \in \mathcal{C}_{bu}(\mathbb{R})$, QED.

Vihjeitä: **9.4**: Todista, että sopivilla $c, r > 0$ (riippuvat f:stä) pätee $|x| > r \implies (Mf)(x) \geq c|x|^{-k}$. Sovella sitten annettua lemmaa. **9.6**: $f_n := n\int_x^{x+1/n} f(s) ds$. Osoita, että $\{f_n\}$ on tasaisesti yhtäjatkuva (equicontinuous) jono $\mathcal{C}_{bu}$:ssa; $f_n(t) \to f(t)\ \forall t \in \mathrm{Leb}(f)$; määrittele $g = f$ $\mathrm{Leb}(f)$:ssä ja raja-arvot tästä muualla; todista, että $g \in \mathcal{C}_{bu}(\mathbb{R})$.