Mat-1.150 Reaalianalyysi 8. harj. vastauksineen ti 23.11.1994 (3 sivua)

Tehtävät 8.3–8.6 eivät ole kovin vaikeita, mutta niissä idean keksiminen *voi* kestää kauan, tehtävässä 8.4 kokeneellakin matemaatikolla.

Huom.: $\int_{\mathbb{R}} ax^2\,dx := \int_{\mathbb{R}} ax^2\,dm =: \int_{\mathbb{R}} ax^2\,dm(x)$, vast. $\int_X ax^2\,d\mu(x) := \int_X ax^2\,d\mu$, mutta mitan perässä oleva (x)-merkintä kertoo integrointimuuttujan (joka esim. viimeisessä merkinnässä jäisi lukijan arvauksen varaan) (vrt. teht. 7.6 ja 8.5).

Tehtävä 8.1 ([6.7] *erittäin helppo ja nopea*):
Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\delta(E) = \begin{cases} 1, & \text{jos } 0 \in E \\ 0, & \text{jos } 0 \notin E \end{cases}$ ja $\nu(E) = \int_E f(t)\,dt$, kun $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:="$\mathbb{R}$:n Borel-joukot“). Onko $\delta \perp \nu$?

Vastaus: Merkitään $\mu \ll A$ joss μ on keskittynyt joukkoon A. Selvästi $\mu \ll A \iff |\mu|(A^c) = 0$.
Nyt $\delta \ll \{0\}$ ja $\nu \ll \{0\}^c$, joten $\delta \perp \nu$.

Kommentti: Huom.: $\int f\,d\delta = f(0)\ \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (ht). Siis $\delta \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})^*$ tulkinnalla $\delta(f) := \int f\,d\delta$ [R2:6.19].
Tämä δ on juuri se δ-distribuutio ("delta-funktio") $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) := \mathcal{D}(\mathbb{R})^* := \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}),\mathbb{C})$ (tässä $\mathcal{D} := \mathcal{C}_c^\infty$ varustettuna topologialla, jossa $f_n \to f$ joss $f_n^{(k)} \underset{\text{tas}}{\rightrightarrows} f^{(k)}\ \forall k$ ja $\exists K \subset\subset \mathbb{R}$ ($\operatorname{supp} f_n \subset K\ \forall n$) [R3:Ch6]), joka on Heavyside-funktion $\chi_{\mathbb{R}_+}$ distribuutioderivaatta ja joka (yksikäsitteisesti $\mathcal{C}(\mathbb{R})$:ään jatkuvasti laajennettuna ($\delta \in \mathcal{C}(\mathbb{R})^*$)) kuvaa jokaisen $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ luvuksi $f(0)$.

Tehtävä 8.2 ([6.1] *helppo,nopea*):
[R2:Exe6.1] Olkoon $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ mitta-avaruus ja

$$\lambda(E) := \sup \sum |\mu(E_i)|,$$

missä supremum otetaan kaikkien *äärellisten* E:n (mitallisten) ositusten yli.
Onko välttämättä $\lambda = |\mu|$?

Vastaus: Selvästi $0 \le \lambda \le |\mu|$. Olkoon sitten $E \in \mathfrak{M}$. Osoitetaan $M < |\mu|(E) \Rightarrow \lambda(E) > M$, mistä seuraa, että $\lambda(E) = |\mu|(E)$. Valitaan E:n (mitallinen) ositus $\{E_i\}$ s.e. $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| > M$ [6.1]. Valitaan n s.e. $\sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| > M$. Nyt osituksen $\{E_1, E_2, ..., E_n, E \setminus (E_1 \cup ... \cup E_n)\}$ mukaan $\lambda(E) > M$.

Tehtävä 8.3 ([6.16] *keskitasoa, keskipitkä*):
[R2:Exe6.4] Olkoot p ja q konjugaattieksponentteja ja $1 \le p \le \infty$. Olkoon μ positiivinen σ-äärellinen mitta ja $g \in L(\mu)$ (siis g on mitallinen $X \to \mathbb{C}$). Todista:

$$\forall f \in L^p(\mu)\ (fg \in L^1(\mu)) \implies g \in L^q(\mu).$$

Vastaus: Tapa 1: Yleisyyttä rajoittamatta oletetaan $g \ge 0$ (muutoinhan g voitaisiin korvata $|g|$:llä). $X = \cup_n X_n$, missä $\mu(X_n) < \infty\ \forall n$. $Y_n := \cup_{k=1}^n X_k\ \forall n$. $g_n := g\chi_{Y_n}\chi_{\{g<n\}}\ \forall n$. Nyt $g_n \in L^q$, joten $\Lambda_n : f \mapsto \int fg_n$ on jatkuva $L^p \to \mathbb{C}$ (ts. $\Lambda_n \in (L^p)^*$) [Hölder tai R2:6.15]. $|\Lambda_n f| \le \int |gf| =: \|gf\|_1 < \infty\ \forall n\ \forall f$, joten $\{\Lambda_n\}$ on pisteittäin rajoitettu, niinpä se on myös tasaisesti rajoitettu [R2:5.8] eli

$$\exists M\ \forall f \in L^p\ \forall n\ (M\|f\|_p \ge |\Lambda_n f| = |\int fg_n|).$$

Toisaalta $g_n \to g$ monotonisesti, joten $M\|f\|_p \ge \lim_n \int fg_n = \int fg$, kun $0 \le f \in L^p$ ja siis $4M\|f\|_p \ge |\int fg|\ \forall f \in L^p$. Nyt $g = h \in L^q$, mikä nähdään kuten alempana.

Tapa 2: Vastaoletus: $g \in L \setminus L^q$, mutta $fg \in L^1\ \forall f \in L^p$.
Oletetaan $g \ge 0$ (muutoin g voidaan korvata $|g|$:llä). $\Lambda f := \int gf\ \forall f \in L^p$. $\Lambda \in \operatorname{Hom}(L^p, \mathbb{C})$ (ts. Λ on lineaarinen funktionaali L^p:llä), koska $gf \in L^1 \Rightarrow \int gf \in \mathbb{C}$ ja selvästi $\Lambda(\alpha f_1 + f_2) = \alpha\Lambda f_1 + \Lambda f_2$.

Λ ei ole rajoitettu. Muutoinhan olisi $\exists h \in L^q$ s.e. $\Lambda f = \int fh\ \forall f$ [R2:6.16], eli $\int f(g-h) = 0\ \forall f \in L^p$. Oletuksen perusteella $X = \cup_n X_n$, missä $\mu(X_n) < \infty\ \forall n$. Valitaan n s.e. ei ole ($g - h = 0$ m.k. joukossa X_n) (jos tällaista ei olisi, niin olisi $g = h$ m.k. joukossa X ja siis $g \in L^p$). $f := \chi_{X_n}\overline{(g-h)}/|g-h| \in L^p$, jolloin $\int f(g-h) = \int_{X_n} |g-h| > 0$ [1.39b] RR.

$\forall n$ olkoon $0 \le f_n \in L^p$ s.e. $\|f_n\|_p = 2^{-n} \wedge \Lambda f_n > n$ (koska Λ ei raj., on $f_n' \in L^p$ s.e. $|\Lambda f_n| > n2^n\|f_n'\|_p$; $f_n := |f_n'|2^{-n}/\|f_n'\|_p$). $h_n := \sum_{j=1}^n f_j$, jolloin

$$\|h_{n+k} - h_n\|_p = \|\sum_{j=n+1}^{n+k} f_j\|_p \le \sum_{j=n+1}^{n+k} \|f_j\|_p < 2^{-n},$$

joten kyseessä on L^p-Cauchy-jono ja siis $h_n \underset{L^p}{\rightrightarrows} f$ jollain $f \in L^p$. Lisäksi $h_n \underset{\text{m.k.}}{\rightrightarrows} f$ [R2:3.12] (kun $\{h_n\}$ korvataan tarvittaessa osajonollaan) ja tämä suppeneminen on monotonista, koska $f_n \ge 0\ \forall n$. Niinpä

$$\Lambda f := \int fg = \int \lim_{n\to\infty} h_n g \overset{mon.konv.}{=} \lim_{n\to\infty} \int h_n g = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^n f_n g$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int f_n g \ge \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n k = \infty,$$

joten $fg \notin L^1$, RR. ////

Tehtävä 8.4 ([Ch6] *vaikea keksiä, keskipitkä*):
[R2:Exe6.9] Olkoon $\{g_n\} \subset \mathcal{C}(I, [0,\infty[)$ (siis jono jatkuvia positiivisia funktioita joukossa $I := [0,1]$),
μ positiivinen I:n Borel-mitta ja

(i) $\lim_n g_n(x) = 0$ m.k.$[m]$,
(ii) $\int_I g_n\, dm = 1\ \forall n$,
(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_I f g_n\, dm = \int_I f\, d\mu\ \forall f \in \mathcal{C}(I)$.

Onko välttämättä $\mu \perp m$?

Vastaus: Jos $\mu_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\delta_{(k-\frac{1}{2})/n}$, niin tasaisen jatkuvuuden perusteella $\int f\, d\mu_n \to \int f\, dm$, kun $f \in \mathcal{C}(I) = \mathcal{C}_u(I)$. Seuraavassa "korvataan $d\mu_n$ samantapaisella $g_n\, dm$", mistä seuraa, että väite on väärä ($\mu = m \not\perp m$).

$g_n := \sum_{k=1}^n h_{n,k}$, missä $h_{n,k}$ on kolmiopiikki, jonka korkeus on 2^n ja leveys $2 \cdot 2^{-n}/n$ ja keskipiste $x_{n,k} := \frac{k-\frac{1}{2}}{n}$. Selvästi (ii). $I_{n,k} := \operatorname{supp} h_{n,k}$, jolloin $m(I_{n,k}) = 2\cdot 2^{-n}/n$ ja siis $\sum_{n\in\mathbb{N},\ 1\le k\le n} m(I_{n,k}) = 2 < \infty$, joten niiden x joukko N, joilla x on äärettömän monessa $I_{n,k}$, on nollamitallinen [R2:1.41]. Jos $x \in N^c$, niin $g_n(x) = 0\ \forall n \ge n_x$, joten $\lim_n g_n(x) = 0$ (i).

(iii) nähdään seuraavasti: Olkoon annettu $f \in \mathcal{C}$ ja $\epsilon < 0$. Valitaan n_ϵ s.e. $\forall x, y \in I$ $(|x-y| < 1/n_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < -\epsilon/2)$. Nyt $\int f h_{n,k} = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f h_{n,k}$ (*) ja $\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x_{n,k}) h_{n,k}(x) = f(x_{n,k})/n = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x_{n,k})$ (**), joten

$$|\int f g_n\, dm - \int f\, dm| = |\sum_{k=1}^n \int f h_{n,k} - \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} f| \overset{*}{\le} \sum_{k=1}^n |\int_{(k-1)/n}^{k/n} (f h_{n,k} - f)|$$

$$\overset{**}{=} \sum_{k=1}^n \left| \int_{(k-1)/n}^{k/n} (f(x)h_{n,k}(x) - f(x_{n,k})h_{n,k}(x) + f(x_{n,k}) - f(x)) \right|$$

$$\le \sum_{k=1}^n [\int_{(k-1)/n}^{k/n} |h_{n,k}(x)||f(x) - f(x_{n,k})| + \int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x_{n,k}) - f(x)|] < \sum_{k=1}^n [-\epsilon/2n - \epsilon/2n] = -\epsilon.$$

Tehtävä 8.5 ([6.14] *keskitasoa, pitkähkö*):
[R2:Exe8.7] Olkoon $\mu \in M(T)$ (ts. joukon $[0, 2\pi[$ kompleksimitta). Sen Fourier-kertoimiksi määritellään

$$\hat\mu(n) = \int_0^{2\pi} e^{-int}\, d\mu(t)\ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

a) Osoita, että voi olla $\hat\mu(n) \not\to 0$, kun $n \to \pm\infty$.
b) Osoita, että $\hat\mu(n) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \implies \hat\mu(n) \overset{n\to-\infty}{\to} 0$.

Vastaus: a) $\mu = \delta$, jolloin $\hat\mu(n) = 1\ \forall n$, sillä $\int_T f\, d\delta = f(0)\ \forall f \in \mathcal{C}$ (tämä nähdään ensin positiivisille f, siitä kaikille). (Huom.: $|\hat\mu(n)| \le \|\mu\| := |\mu|(T)\ \forall n$.)

b) (ks. vihje) 1° $\int e^{-int} e^{ikt}\, d\mu = \hat\mu(n-k) \overset{n\to\infty}{\to} 0$, sama pätee tietysti kun $f = P = \sum_{j=1}^l \alpha_j e^{ik_j t}$.

2° Olkoon annettu $f \in \mathcal{C}$ ja $\epsilon > 0$. Valitaan P s.e. $\sup|f - P| < \epsilon/2\|\mu\|$ [R2:4.25]. Jos $n \ge N_{P,\epsilon/2}$, niin

$$|\int e^{-int} f\, d\mu| \le |\int e^{-int}(f-P)\, d\mu| + |\int e^{-int} P\, d\mu| < \int |e^{-int}(f-P)|\, d|\mu| + \epsilon/2 < \epsilon.$$

3° Olkoon annettu $f \in \mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}^1(|\mu|)$. Valitaan $g \in \mathcal{C}(T)$ s.e. $\|f - g\|_{L^1(\mu)} < \epsilon/2$ [R2:3.14]. Jos $n \ge N_{P,\epsilon/2}$, niin...

4° Valitaan $f := \bar h$, missä $d\mu = h\, d|\mu|$ [R2:6.12] (jolloin $\|h\|_{L^1(\mu)} := \int |h|\, d|\mu| = \|\mu\| < \infty$).

$$\int e^{-int}\, d|\mu| = \int e^{-int} \bar h h\, d|\mu| = \int e^{-int} \bar h\, d\mu \to 0.$$

5° $0 \leftarrow \int e^{-int}\, d|\mu| = \int \cos nt\, d|\mu| - i \int \sin nt\, d|\mu|$, joten reaaliosa $\int \cos nt\, d|\mu| \to 0$, sin vast. Niinpä $0 \leftarrow \int \cos nt\, d|\mu| + i\int \sin nt\, d|\mu| = \int e^{int}\, d|\mu|$.

6° Tästä nähdään kohtien 1°–4° tavoin, että

$$0 \leftarrow \int e^{int} h\, d|\mu| = \int e^{int}\, d\mu =: \hat\mu(-n), \quad \text{QED.}$$

Kommentteja: Joissain teoksissa $T := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\} = e^{i\mathbb{R}}$; joissain $T := [0, 2\pi[$ varustettuna syklisellä topologialla (em. samaistuksen indusoimalla topologialla, joka siis eroaa $\mathbb{R}$:stä peritystä siinä, että piste 0 on joukon A sisäpiste joss jollain $r > 0$ on $[0, r[\subset A \wedge]2\pi - r, 2\pi[\subset A$) (tai $T =]-\pi, \pi]$ vastaavasti). Näissä tulkinnoissa ei yleensä ole eroa (struktuurit ovat isomorfisia niin topologisina avaruuksina kuin mitta-avaruuksinakin), mikä selitetään osittain kohdassa [R2:4.23]. Joissain teoksissa T:ssä käytetään ensisijaisesti Lebesguen mittaa, joissain se jaetaan 2π:llä.

Suosittelen lukijalle, että hän ajattelee $T := [0, 2\pi[$ (tai yhtä hyvin $T :=]-\pi, \pi]$) (mikä $L^p(T)$-avaruuksista puhuttaessa on ongelmatonta) sillä lisäyksellä, että $f \in \mathcal{C}(T)$ joss f voidaan jatkaa $\mathbb{R}$:n jatkuvaksi 2π-jaksoiseksi funktioksi, ts. $f \in \mathcal{C}([0, 2\pi[) \wedge \lim_{x\to 2\pi-} f(x) = f(0)$. Joka tapauksessa tässä ei varsinaisesti ole kyse epämääräisistä käsitteistä vaan merkintätapojen epästandardiudesta.

Tehtävä 8.6 ([6.14] *keskitasoa, keskipitkä*):

[R2:Exe8.8] Etsi kaikki ne $\mu \in M(T)$, joilla $\hat{\mu}$ (ks. 8.5) on k-jaksoinen (ts. $\hat{\mu}(n+k) = \hat{\mu}(n)\ \forall n \in \mathbb{Z}$) (toki oltava $k \in \mathbb{Z}$).

Vastaus: $\int e^{-i(n+k)t}\,d\mu(t) =: \hat{\mu}(n+k) = \hat{\mu}(n) = \int e^{-int}\,d\mu(t)$ joss

$$0 = \int e^{-i(n+k)t} - e^{-int}\,d\mu = \int e^{-int}(e^{-ikt} - 1)\,d\mu.$$

(Jatko: vrt. tehtävään 8.5.) Niinpä $0 = \int f(t)(e^{-ikt} - 1)\,d\mu =: I$, kun $f = P$. Niinpä $0 = I$ myös kun $f \in \mathcal{C}(T)$ (koska $|I| \leq |\int P(t)(e^{-ikt}-1)\,d\mu| + \int |P-f||(e^{-ikt}-1)|\,d|\mu| < 0 + 2\|\mu\|\epsilon\ \forall\epsilon$ [R2:4.25]). Niinpä $0 = I$ myös kun $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (koska $|I| < 0 + 2\|\mu\|\epsilon\ \forall\epsilon$ [R2:3.14]).

Kun $|h| \equiv 1$ ja $d\mu = h\,d|\mu|$, on $\|\overline{(e^{-ikt}-1)h}\|_{L^1(\mu)} := \int |e^{ikt} - 1||h|\,d|\mu| \leq 2\int 1\,d|\mu| = 2\|\mu\| < \infty$, joten $0 = \int \overline{(e^{-ikt}-1)h(t)}(e^{-ikt}-1)\,d\mu = \int |(e^{-ikt}-1)|^2\,d|\mu|$. Niinpä $|(e^{-ikt}-1)|^2 = 0$ m.k.$[\mu]$ [R2:1.39b], siis $0 = \mu(\{t \mid e^{-ikt} \neq 1\}) = \mu(T \setminus A_k)$, missä $A_k = \{\frac{l}{k}2\pi \mid l = 0, 1, ..., k-1\}$. Siis ehtona on se, että μ on keskittynyt joukkoon A_k; ehto on selvästi myös riittävä.

Kommentti: Siitä, että μ on keskittynyt äärelliseen joukkoon $\{x_1, ..., x_k\}$, seuraa, että $\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_k \delta_{x_k}$, missä $\delta_{x_k}(E) = \chi_{x_k \in E}$ (htl).

———————————

Vihjeitä: **8.3**: Oletetaan $g \geq 0$ (muutoin g voidaan korvata $|g|$:llä). $\Lambda f := \int gf\ \forall f \in L^p$...
Jos $\|g\|_q = \infty$, niin $\forall n$ valitaan $f_n \geq 0$ s.e. $\|f_n\|_p < 2^{-n}$, mutta $\Lambda f_n > 1$ (miksi $\exists f_n$?). Jos $f := \lim_n \sum_{k=1}^{n} f_n$, niin $f \in L^p$ (miksi?), mutta $\int fg = \infty$ [mon.konv] (miksi?).
8.5: a) Keksi helppo esim. b) Jos kerran $\int e^{-int} f(t)\,d\mu(t) \to 0$, kun $f \equiv 1$, niin 1° myös kun f on trigonometrinen polynomi, 2° myös kun $f \in \mathcal{C}$, 3° myös kun $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (vaihtoehtoisesti: kun $f \in \mathcal{L}_b$, ts. f on mitallinen ja rajoitettu). 4° $\int e^{-int} f(t)\,d|\mu|(t) \to 0$. 5° $\hat{\mu}(n) \to 0$ kun $n \to -\infty$ (ei triviaalia!).
8.6: Kirjoita ehto auki (yhdeksi integraaliksi), sitten menettele tehtävän 8.6 tapaan.