Mat-1.150 Reaalianalyysi 7. harj. vastauksineen ti 15.11.1994 (3 sivua)

Seitsemännet harjoitukset pidetään vasta 15.11. Kurssissa on siis n. 10 laskuharjoitusta.

Tehtävä 7.1 ([Luku4] *helpohko, lyhyt*):
[R2:Exe4.9] Todista: Jos $A \subset [0, 2\pi]$ on mitallinen, niin

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \cos nx\, dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_A \sin nx\, dx.$$

Vastaus: $f := \chi_A$. $(f,g) := \int_T f\bar{g}$. $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ [R2:s.92].

$$\int_A \cos nx\, dx = \int_T f \cos nx\, dx = (f, \cos nx) = (f, e^{inx} + e^{-inx})/2 = (\hat{f}(n) + \hat{f}(-n))/2 \to 0,$$

koska $\hat{f}(n) \overset{n\to\pm\infty}{\to} 0$, kun $\hat{f} \in \ell^p(\mathbb{Z})$, missä $0 < p < \infty$ (htl). Toinen integraali hoituu vastaavasti.

Kommentti: $\hat{f}(n) \overset{n\to\pm\infty}{\to} 0\ \forall f \in \ell^p(\mathbb{Z})$ on ekvivalenttia väitteen $\ell^p(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{Z}) =: c_0$ kanssa (ht).
(Huom.: $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{N}$ on tapana varustaa $\mathbb{R}$:ltä perityllä topologialla (joka tekee niistä diskreettejä) sekä lukumäärämitalla. Niinpä kaikki niillä määritellyt funktiot ovat jatkuvia ja mitallisia; kompakteja ovat täsmälleen niiden äärelliset osajoukot.)

Tehtävä 7.2 ([5.2] *keskitasoa, lyhyehkö*):
[R2:Exe5.3] a) Olkoon $1 < p < \infty$. Todista, että $L^p(\mu)$:n yksikköpallo on konveksi, ts. että

$$\|f\|_p = 1 = \|g\|_p \wedge f \neq g \wedge h = \frac{1}{2}(f+g) \Rightarrow \|h\|_p < 1.$$

(Geometrinen tulkinta: yksikköpallon pinnalla ei ole suoria.)
b) Osoita, että tämä ei päde $L^1(\mu)$:ssä, $L^\infty(\mu)$:ssä eikä $\mathcal{C}_b(X)$:ssä (rajoitetut jatkuvat fkt sup-normilla) tavanomaisilla μ, X ja $\mathcal{T}$.

Vastaus: Tässä funktioita ajatellaan $L := L(\mu)$:n (mitallisten funktioiden ekvivalenssiluokat) alkioina, siis funktioiden yhtäsuuruudet tarkoittavat yhtäsuuruuksia m.k.

a) Hölderin epäyhtälössä on yhtäsuuruus joss f^p ja g^q ovat lineaarisesti riippuvia (L:ssä, siis m.k.) [R2:3.5,s.90], tästä voidaan päätellä
(kaavoissa (9) ja (9') oltava yhtäsuuruus, ts. parien $(f^p, (f+g)^p)$ ja $g^p, (f+g)^p$ on oltava lineaarisesti riippuvia eli parien $(f, f+g)$ ja $g, f+g$ eli parien (f,g) ja (f,g))
että Minkovskin epäyhtälössä on yhtäsuuruus joss f ja g ovat lineaarisesti riippuvia (tässä $f, g \geq 0$).

Jos sitten $f, g \in L^p(\mu)$, niin

$$\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p = \|\,|f|\,\|_p + \|\,|g|\,\|_p \Rightarrow \int |f+g|^p = \int \big||f|+|g|\big|$$

$$\Rightarrow \int \big||f|+|g|\big|^p - |f+g|^p = 0 \overset{R2:1.39b}{\Rightarrow} \big||f|+|g|\big|^p - |f+g|^p = 0 \text{ m.k.}$$

$$\Rightarrow |f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| \text{ m.k. } x.$$

Toisaalta edellisen kappaleen perusteella $|f| = \gamma|g|$ jollain $\gamma \geq 0$ (ellei $g = 0$). $z, w \in \mathbb{C} \wedge |z+w| = |z| + |w| \Rightarrow \arg(z) = \arg(w)$, joten $f(x) = |f(x)| \arg(f(x)) = \gamma|g(x)| \arg(g(x)) = \gamma g(x)$ m.k. x. (Ehdon riittävyyskin käy ilmi edellisestä kappaleesta.)

Niinpä $f, g \in L^p(\mu) \wedge \|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p \Rightarrow g = 0$ m.k. $\vee\, \exists \gamma \geq 0$ ($f = \gamma g$ m.k.).

Sitten varsinaiseen tehtävävän: Jos $0 < \lambda < 1$ ja $\|\lambda f + (1-\lambda) g\|_p = 1 = \|\lambda f\|_p + \|(1-\lambda) g\|_p$, niin $\lambda f = \gamma(1-\lambda) g$ eli $f = \frac{\gamma(1-\lambda)}{\lambda} g$, joten $f = g$ (koska $\|f\|_p = 1 = \|g\|_p$).

b) Olkoot $\mu(A), \mu(B) \in]0, \infty[$ ja $\mu(A \setminus B) > 0$ (tällaiset A, B löytyy miltei joka $(X, \mathfrak{M}, \mu)$:stä).
L^∞: $h = \frac{1}{2}(\chi_{A\cup B} + \chi_B) \Rightarrow h_{|B} = 1 \wedge \|h\|_\infty = 1$, vaikka $\chi_{A\cup B} - \chi_B = \chi_{A\setminus B} \neq 0$ (positiivimitallisessa joukossa, siis myös avaruudessa L^∞).
L^1: $f := \chi_A/\mu(A)$, $g := \chi_B/\mu(B) \Rightarrow \|h\|_1 = 1$ vaikka $f \neq g$ avaruudessa L^1.
$\mathcal{C}_b, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_c$: Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorff-avaruus (esim. $\mathbb{R}^k$ tai $\mathbb{N}$), jossa on kaksi erillistä epätyhjää avointa joukkoa V ja V'. Valitaan $x \in V$ ja $x' \in V'$. Olkoot $f, g \in \mathcal{C}_c$ s.e. $\chi_{\{x\}} \leq f \leq \chi_V \wedge \chi_{\{x,x'\}} \leq g \leq \chi_{V\cup V'}$ [R2:2.12 = Urysohnin lemma]. Tällöin $h(x) = 1$, joten $\|h\| := \sup |h| = 1$.

Tehtävä 7.3 ([5.3/5.21] *keskitasoa, pitkähkö*):
[R2:Exe5.9ab] $c_0 := \mathcal{C}_0(\mathbb{N})$, $\ell^1 := L^1(\mathbb{N})$, $\ell^\infty := L^\infty(\mathbb{N})$, jolloin $\|x\|_1 = \sum_n |x_n|$, $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$, $\ell^\infty = \mathcal{C}_b(\mathbb{N})$ ja $c_0 := \mathcal{C}_0(\mathbb{N}) = \{x \in \ell^\infty \mid x_n \to 0\}$ (htl). Todista:

a1) Jos $y \in \ell^1$ ja $\Lambda x = \sum_k x_k y_k\ \forall x \in c_0$, niin $\Lambda \in c_0^* := \mathcal{L}(c_0, \mathbb{C})$.
a2) Jokainen $\Lambda \in c_0^*$ on jonkin $y \in \ell^1$ määräämä (kuten yllä), ts. $c_0^* = \ell^1$ (tai eivät ko. avaruudet ole aivan samoja, mutta em. tulkinta on eräs kuvaus $\ell^1 \to c_0^*$, joka on isometrinen isomorfismi (isometrinen vektoriavaruusisomorfismi eli isometrinen lineaarinen bijektio (tällaisen käänteiskuvaus on aina isometrinen lineaarinen bijektio (htl)))).
b) Samassa mielessä $\ell^{1*} = \ell^\infty$.

Vastaus: Tässä todistuksessa voidaan tulkita nollaksi termit, joissa jaetaan nollalla.
a1) Selvästi Λ on lineaarinen.
1° $|\Lambda x| \leq \sum_i |x_i y_i| \leq \sum_i \|x\|_\infty |y_i| = \|x\|_\infty \|y\|_1 < \infty\ \forall x \in c_0$, joten Λx on määritelty

kaikilla x ja $||L||_{c_0^*} \leq ||y||_1$. Siis Λ on jatkuva (koska rajoitettu ja lineaarinen [5.4]) ja lineaarinen $c_0 \to \mathbb{C}$, eli $\Lambda \in c_0^*$.
2° Todistetaan bonuksena, että $||\Lambda||_{c_0^*} = ||y||_1$ (tämä todistaa a2-kohdan bijektion isometriseksi): Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan n s.e. $\sum_{i=1}^n |y_i| > ||y||_1 - \epsilon$. $x_k := \frac{|y_k|}{y_k}\chi_{k\leq n}$ $\forall k$. Tällöin $||x_k||_\infty \leq 1 \wedge x_k \in \mathcal{C}_c \subset \mathcal{C}_0 =: c_0$ ja $|\Lambda x| = \sum_{k=1}^\infty y_k x_k = \sum_{k=1}^n |y_k| > ||y||_1 - \epsilon$. ϵ mv., joten $||\Lambda||_{c_0^*} \geq ||y||_1$.

a2) Olkoon $\Lambda \in c_0^*$. $y_k := \Lambda\chi_{\{k\}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Jos nyt jollain n olisi $\sum_{k=1}^n |y_k| > ||\Lambda||$, niin valittaisiin x kuten 2°:ssa, niin että $||x||_{c_0} \leq 1$ ja

$$\Lambda x = \Lambda \sum_{k=1}^n (|y_k|/y_k)\chi_{\{k\}} = \sum_{k=1}^n (|y_k|/y_k)\Lambda\chi_{\{k\}} = \sum_{k=1}^n |y_k| > ||L||$$

RR, siis $\sum_{k=1}^\infty |y_k| < \infty$ eli $y \in \ell^1$.
On enää todistettava, että $\Lambda = \Lambda'$, missä $\Lambda' x := \sum_k y_k x_k$: Jos $x \in \mathcal{C}_c(\mathbb{N})$ (ts. $\exists n$ s.e. $x_k = 0$ $\forall k > n$ (htl)), niin $\Lambda x = \Lambda \sum_{k=1}^n x_k\chi_{\{k\}} = \sum_{k=1}^n x_k \Lambda\chi_{\{k\}} = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \Lambda' x$. Jos sitten $x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{N})$, niin $x = \lim_{n\to\infty} x\chi_{\{1,\ldots,n\}}$ (htl), joten

$$\Lambda x = \lim_n \Lambda(x\chi_{\{1,\ldots,n\}}) = \lim_n \Lambda'(x\chi_{\{1,\ldots,n\}}) = \Lambda' x,$$

sillä Λ ja Λ' ovat jatkuvia. (Tämän olisi saanut silläkin perusteella, että $\mathcal{C}_c(\mathbb{N})$ on tiheä $\mathcal{C}_0(\mathbb{N})$:ssä [R2:3.17]; tosin tämä todistettiin ylläkin.)
(Huom.: $\mathcal{C}_c(\mathbb{N})$ ei ole tiheä $L^\infty(\mathbb{N})$:ssä, joten vaikka ℓ^1-funktiot (jonot) ovat $(\ell^\infty)^*$:ssä), siellä on muutakin (yllä ei välttämättä $\Lambda x = \Lambda' x$, ellei $x \in \bar{\mathcal{C}_c} = \mathcal{C}_0 \subsetneq L^\infty$.)

b1) Todistus samanlainen kuin a-kohdassa: Olkoon $y \in \ell^\infty$ ja $\Lambda x := \sum_k x_k y_k$ $\forall x \in \ell^1$. $|\sum_k x_k y_k| \leq \sum_k |x_k| ||y||_\infty = ||x||_1 ||y||_\infty < \infty$, joten Λx on määritelty $\forall x \in \ell^1$ ja $||\Lambda||_{(\ell^1)^*} \leq ||y||_\infty$. Selvästi Λ on lineaarinen, joten $\Lambda \in (\ell^1)^*$.
Valitaan k s.e. $|y_k| > ||y||_\infty - \epsilon$. Tällöin $\Lambda |y_k|/y_k \chi_{\{k\}} = |y_k| > ||y||_\infty - \epsilon$ ja $|||y_k|/y_k\chi_{\{k\}}||_1 \leq 1$, joten $||\Lambda||_{(\ell^1)^*} = ||y||_1$.

b2) Olkoon $\Lambda \in (\ell^1)^*$. $y_k := \Lambda\chi_{\{k\}}$ $\forall k$, jolloin $||y||_\infty \leq ||\Lambda||_{(\ell^1)^*}$. Olkoon $\Lambda' x := \sum_k x_k y_k$ $\forall x \in \ell^1$, jolloin $\Lambda' \in (\ell^1)^*$ [b1]. On enää todistettava, että $\Lambda' x = \Lambda x$ $\forall x$ (jolloin $||\Lambda|| = ||L'|| = ||y||_\infty$). Tämä nähdään kuten kohdassa a1. (Onhan $||x - x\chi_{\cdot\leq n}|| = \sum_{k=n+1}^\infty |x_k| \to 0$ $\forall x \in \ell^1$.)

Kommentteja: Lukujonoa $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ voidaan ajatella funktiona $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (ja päinvastoin), tästä esimerkkinä $\chi_{\{3\}} = (0,0,1,0,0,0,\ldots)$.
Lause [R2:6.16] sanoo, että $(L^p)^* = L^q$, kun $1 \leq p < \infty$ ja X ei ole kovin epätavallinen; tästä saataisiin b-kohta suoraan.
$\mathbb{N}$ varustetaan lukumäärämitalla ($\mathfrak{M} := \mathcal{P}(\mathbb{N})$) ja $\mathbb{R}$:ltä perityllä topologialla (tekee kaikki joukot avoimiksi (diskreetti topologia), siis kaikki funktiot jatkuviksi). Lisäksi kompakteja $\mathbb{N}$:n osajoukkoja ovat täsmälleen sen äärelliset osajoukot (htll), joten $\mathcal{C}_c(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists n\ (x(k) = 0\ \forall k > n)\}$.
(c) Vastaavasti $\ell^1 \subset \ell^{\infty *}$, mutta kaikki $\Lambda \in \ell^{\infty *}$ eivät ole tällaisia (on siis olemassa $\Lambda \in \ell^{\infty *}$ s.e. $\Lambda|_{c_0} = 0$).
(d) c_0 ja ℓ^1 ovat separoituvia, mutta ℓ^∞ ei ole.

Todistus: (c) $\subset$ kuten (a), mutta c_0 on ℓ^∞:n suljettu [R2:3.17] aito (miksi?) aliavaruus, joten $\exists\Lambda\ldots$ [R2:5.19]. ////
(d) 1° Joukko $A := \{\sum_{j=1}^n q_j\chi_{\{j\}} \mid n \in \mathbb{N},\ q_j \in \mathbb{Q}\ \forall j \leq n\}$ on numeroituva ja $\mathcal{C}_c(\mathbb{N}) \subset \bar{A}$ (htl), joten $c_0 := \mathcal{C}_0(\mathbb{N}) \subset \bar{A}$, siis $c_0 = \bar{A}$, joten c_0 on separoituva. ℓ^1 vastaavasti.
2° Joukko $\mathcal{A} := \{\chi_A \mid A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})\} \subset \ell^\infty$ on ylinumeroituva (mahtavuus$= \mathcal{P}(\mathbb{N}) =: 2^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$), ja pallot $B_1(\chi_A)$ ($A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$) ovat erillisiä (koska $A \neq A' \Rightarrow ||\chi_A - \chi_{A'}||_\infty = 1$), joten jos $Q \subset \ell^\infty$ on numeroituva, niin jossain $B_1(\chi_A)$ ei ole Q:n alkioita, siis $B_1(\chi_A) \subset (\bar{Q})^c \neq \emptyset$. ////

Tehtävä 7.4 ([Luku4] *helpohko, nopeahko*):
Osoita, että jos $f \in \mathcal{C}^k(T)$ (ts. f on k kertaa jatkuvasti derivoituva 2π-jaksoinen funktio), niin $\hat{f}(n) = o(n^{-k})$ ($|n| \to \infty$). (so. $\hat{f}(n)/n^{-k} \to 0$, kun $|n| \to \infty$).

Vastaus: Jos $g \in \mathcal{C}^1(T)$, niin

$$\widehat{g'}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} g(x)e^{-inx} - (-in)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-inx}\,dx = 0 + in\hat{g}(n).$$

Induktiolla $(in)^k\hat{f}(n) = \widehat{f^{(k)}}(n)$ $\forall n$, joten $|f(n)/n^{-k}| = |\widehat{f^{(k)}}(n)| \to 0$, kun $|n| \to \infty$, koska $\hat{g}(n) \to 0$ $\forall g \in \mathcal{C}(T)$ (jopa kaikilla $g \in L^1(T)$ (ht)), mikä nähdään seuraavasti: Valitaan trigonometrinen polynomi $P = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ikx}$ s.e. $\sup|g - P| < \epsilon$. Jos $|n| > N$, niin

$$|\hat{g}(n)| = |\hat{g}(n) - \hat{P}(n)| = |\widehat{(g-P)}(n)| = |\int_T (g(x) - P(x))e^{-inx}| < \int_T \epsilon = \epsilon.$$

Tehtävä 7.5 ([6.8] *varsin helppo ja nopea*):
Valitse $(X, \mathfrak{M})$ (esim. $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$) ja määrittele sen kompleksimitat μ ja ν s.e. mikään relaatioista $\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mu$ ja $\mu \perp \nu$ ei ole voimassa.

Vastaus: Tapa 1: $\mu(\{0\}) = 1 = \mu(\{1\})$; $0, 1 \notin E \Rightarrow \mu(E) = 0$. $\nu(\{0\}) = 1 = \nu(\{-1\})$; $0, -1 \notin E \Rightarrow \nu(E) = 0$. Jos μ on keskittynyt A:lle ja ν B:lle, niin $0 \in A \cap B$, joten $A \cap B \neq \emptyset$, siis $\neg(\mu \perp \nu)$. Selvästi $\mu \not\ll \nu \wedge \nu \not\ll \mu$.

Tapa 2: $\mu(E) := \int_0^2 \chi_E\,dm$ ja $\nu(E) := \int_1^3 \chi_E\,dm$. Ei ole $\mu \perp \nu$, koska jos μ on keskittynyt $A \in \mathcal{B}$:lle ja ν $B \in \mathcal{B}$:lle, niin $m([1,2] \setminus (A \cap B)) = 0$ (koska $([1,2] \setminus A) \cap A = \emptyset$, joten

$0 = \mu([1,2] \setminus A) = m([1,2] \setminus A)$; B vast.). Niinpä $A \cap B \neq \emptyset$.
Selvästi $\mu \not\ll \nu \wedge \nu \not\ll \mu$.

Kommentti: μ ja ν ovat äärellisiä positiivisia (ja kompleksisia) mittoja $\mathcal{B}$:llä, koska $0 \leq \mu(E), \nu(E) \leq 2\ \forall E \in \mathcal{B}$ ja jos $E = \uplus_n E_n$, niin $\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$ ja

$$\mu(E) = \int_0^2 \chi_E \overset{mon.konv.}{=} \lim_{N\to\infty} \int_0^2 \sum_{n=1}^{N} \chi_{E_n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^2 \chi_{E_n} =: \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Tehtävä 7.6 ([Luku6] *helpohko, lyhyehkö*):
Olkoot $\mu, \nu \in M(\mathbb{R})$ (ts. ne ovat kompleksisia mittoja Borel-σ-algebralla $\mathcal{B}$). Näiden *konvoluutio* on $\mu * \nu$, missä

$$(\mu * \nu)(E) := \int_{\mathbb{R}} \mu(E - s)\, d\nu(s) \quad (E \in \mathcal{B}).$$

Saat olettaa tunnetuksi, että $s \mapsto \mu(E - s)$ on mitallinen funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
a) Osoita, että $\mu * \nu$ on $\mathbb{R}$:n kompleksimitta.
b) $\mu \ll m \Rightarrow \mu * \nu \ll m\ \forall \nu$? ($m$ on Lebesguen mitta.)

Vastaus: Ensin tulisi todistaa, että $f \in \mathcal{L}((\mathbb{R}, \mathcal{B}); \mathbb{C})$, kun $f : s \mapsto \mu(E - s)$. Tämä on kuitenkin turhan vaikeaa ilman [R2:Ch8]:n koneistoa, joten se sivuutetaan.

a) Valitaan $h \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ s.e. $|h| \equiv 1 \wedge d\nu = h\, d|\nu|$ [R2:6.12]. Olkoon $E = \uplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ ja $E, E_n \in \mathcal{B}\ \forall n$. Tällöin $E - s = \uplus_{n\in\mathbb{N}}(E_n - s)\ \forall s$.

$$\sum_n \mu*\nu(E_n) = \sum_n \int \mu(E_n - s) h(s)\, d|\nu|(s) \overset{dom.konv.}{=} \int \sum_n \mu(E_n - s) h(s)\, d|\nu|(s) = \int \mu(E - s) h(s)\, d|\nu|(s)$$

(dom.konv.: $|h(s) \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n - s)| \leq 1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n - s)| \leq |\mu|(E - s) \in L^1(\nu)$; tästä nähdään myös, että yo. summassa termit $\leq |\mu(E_n - s)| \|\nu\|$, joiden summa $\leq |\mu|(E - s)\|\nu\| < \infty$, joten summa suppenee absoluuttisesti, siis $\mu * \nu$ on kompleksinen Borel-mitta).

b) Olkoon $\mu \ll m$. $m(E) = 0 \Rightarrow m(E - s) = 0\ \forall s \Rightarrow \mu(E - s) = 0\ \forall s \Rightarrow \mu * \nu(E) := \int \mu(E - s)\, d\nu(s) = 0$, joten $\mu * \nu \ll m$.

Kommentteja: Yllä $\mathbb{R}$ olisi voitu korvata avaruudella $\mathbb{R}^k$. Konvoluutio on kommutatiivinen, assosiatiivinen ja distributiivinen; sen muista ominaisuuksista tarkemmin: ks. [R2:Exe8.5].
b) Jos m korvataan jollain ei-translaatioinvariantilla mitalla, väite ei välttämättä päde (esim. $\delta * \nu = \nu \not\ll \delta$, kun δ on pistemassa nollassa).

Vihjeitä: **7.1**: $\int_A \cos nx\, dx = (f, \cos nx)$ avaruudessa $L^2(T)$, missä $f = \ldots$.
7.2: Millä edellytyksillä Minkovskissa on yhtäsuuruus (ks. [R2:s.65&64])?
7.3: Jos $\Lambda = \Lambda_y$, niin mitkä ovat $y_1, y_2, \ldots$? Todista, että $\Lambda x = \Lambda_y x\ \forall x$.
7.4: Koita ilmaista $\hat{f}^{(k)}(n)$ $\hat{f}$:n avulla.