Mat-1.150 Reaalianalyysi 6. harj. ti 1.11.1994 (6 sivua)

Kurssin **1. välikoe** (1/2) pidetään ma 7.11.94 klo 16–19 samoissa saleissa kuin muutkin matematiikan tentit (ks. ilmoitustaulut). Koealue on [R2:Ch1–3] poislukien kohdat 1.40, 1.41, 2.22 ja 2.23 sekä kohtien 1.36, 2.12, 2.13, 2.14, 2.24, 2.25 ja 3.17 todistukset. Siis välikokeeseen tulevat harjoitukset 1–5 sekä tämän harjoituksen kolmannen luvun tehtävät (eli 6.1, 6.2 ja 6.3). Koetehtävät ovat pääasiassa "keskitasoa"; 6.3:n pituisia kartetaan (sellaisia tehtäviä ei pitäisi olla laskareissakaan, niin kauan kun laskareissa on kuusi tehtävää); koetehtävät voivat olla myös todistustehtäviä.

Välikokeen vuoksi **laskuharjoitus 7** pidetään vasta 15.11.94. Tätä paperia ei ole ehditty kunnolla tarkastaa, virheet → kalle.mikkola@hut.fi.

Muistutettakoon, että $f_n \underset{L^p}{\rightarrow} f$ tarkoittaa, että $f_n \to f$ avaruudessa L^p eli $f \in L^p \wedge f_n \in L^p \ \forall n$ ja niiden välinen L^p-etäisyys $d_{L^p}(f, f_n) := \|f - f_n\|_p \to 0$ (jos $p < \infty$, niin ekvivalentisti $\|f - f_n\|_p^p = \int |f - f_n|^p \to 0$). Jos $0 < p < 1$, niin d_{L^p} ei ole metriikka; näillä L^p-avaruuksilla ei olekaan juuri muuta käyttöä kuin vastaesimerkkeinä toimiminen. Em. merkinnöissähän ei yleensä täsmennetä, tarkoitetaanko funktioita vain ekvivalenssiluokkia, koska kaikilla saman ekvivalenssiluokan $[f] \in L$ edustajilla $g \in [f]$ on sama normi (ja $[f - g] = [f' - g']$, kun $f' \in [f] \wedge g' \in [g]$).

Tehtävä 6.1 ([Luku3] *helpohko (jos c1:tä ei tehdä), keskipitkä, tärkeähkö*):
(a) Osoita, että $\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0$, kun $f \in L^p(\mathbb{R})$ ja $1 \le p < \infty$.

(Huom.: Tämä tulos ($\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p^p = 0$ eli $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$ eli $\tau_h f \overset{h\to 0}{\underset{L^p}{\rightarrow}} f$) osoittaa, että translaatio $S_f : \mathbb{R} \to L^p(\mathbb{R})$, $S_f(h) := \tau_h f$, missä $(\tau_h f)(x) := f(x+h)$, on jatkuva, sillä $\lim_{t\to a} S_f(t) = \lim_{t\to a} \tau_t f = \lim_{t\to a} \tau_{t-a}\tau_a f = \lim_{t-a\to 0} \tau_{t-a}\tau_a f = \tau_a f = S_f(a) \ \forall t \in \mathbb{R}$ (tässä lim tarkoittaa raja-arvoa avaruudessa L^p). Vastaava pätee (samanlaisella todistuksella) muissakin $\mathbb{R}^k$:issa.)

(b) Osoita, että translaatio ei ole jatkuva $L^\infty(\mathbb{R})$:ssä.
(c1) (*erittäin vaikea ilman [R2:Ch7]:n teoriaa*) Hae suurin $L^\infty(\mathbb{R})$:n aliavaruus A, jossa translaatio on jatkuva siis

$$\tau_h f \underset{L^\infty}{\rightarrow} f \text{ eli } \|\tau_h f - f\|_\infty \to 0 \text{ eli } \lim_{h\to 0} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |f(t+h) - f(t)| = 0$$

joss $f \in A$.
(c2) (*helpohko*) Ellet pysty, hae edes jokin $L^\infty(\mathbb{R})$:n aliavaruus A, jossa translaatio on jatkuva ja jota voisi luulla suurimmaksi.

Vastaus: (a) Olkoon $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$. Olkoon $\epsilon > 0$ annettu.
Valitaan $R > 0$ s.e. $\operatorname{supp} f \subset B_R$. Koska jatkuva funktio on kompaktissa joukossa tasaisesti jatkuva [R1:4.19], on olemassa $\delta' > 0$ s.e. $\forall x, h \ (|h| < \delta' \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \big(\epsilon/2(R+1)\big)^{1/p})$. Kun $|h| < \delta := \min(1, \delta')$, on

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx < \int_{-R-1}^{R+1} \epsilon/2(R+1) = \epsilon.$$

Jos sitten $g \in L^p$, niin valitaan $f \in \mathcal{C}_c$ s.e. $\|f - g\|_p < \epsilon/9$ [R2:3.14], ja valitaan funktiolle f ja luvulle $\epsilon/5$ luku δ kuten yllä, niin $\forall |h| < \delta$ pätee

$$\|\tau_h f - f\|_p \le \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|\tau_h g - g\|_p + \|g - f\|_p < \epsilon/9 + \epsilon/5 + \epsilon/9 < \epsilon.$$

(b) Olkoon $f = \chi_{[0,1]}$. Tällöin $\|f - \tau_h f\|_\infty = \|\chi_{[0,1]} - \chi_{[-h,1-h]}\|_\infty \neq 0$, kun $h \neq 0$, sillä tällöin $\chi_{[0,1]} - \chi_{[-h,1-h]} = 1$ positiivimitallisessa joukossa $[0,1] \setminus [-h, 1-h]$.
(c2) $\mathcal{C}_{bu}(\mathbb{R})$ on rajoitettujen tasaisesti jatkuvien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avaruus (se voidaan helposti todistaa vektoriavaruudeksi). $\mathcal{C}_{bu}$ on selvästi $\mathcal{L}^\infty$:n aliavaruus, joten se voidaan tulkita L^∞:n aliavaruudeksi (kun funktiolla $f \in \mathcal{C}_{bu}$ tarkoitetaan ko. funktion ekvivalenssiluokkaa, johon siis kuuluu myös epäjatkuvia ("melkein jatkuvia") funktioita) (siis $\mathcal{C}_{bu}$:lla tarkoitetaan tässä varsinaisten $\mathcal{C}_{bu}$-funktioiden määräämien ekvivalenssiluokkien avaruutta $\subset L^\infty$).
Jos $f \in \mathcal{C}_{bu}$, niin $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.e.

$$x, y \in \mathbb{R} \wedge |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Niinpä $|h| < \delta \implies |f(x+h) - f(x)| < \epsilon \ \forall x$ ja siis $\tau_h f \overset{h\to 0}{\underset{L^\infty}{\rightarrow}} f$.
(c1) Nyt olisi vielä todistettava, että jos $f \in L^\infty$ toteuttaa tehtävän ehdon, niin $f \in \mathcal{C}_{bu}$ eli f kuuluu jonkin $\mathcal{C}_{bu}$-funktion ekvivalenssiluokkaan, eli $\exists g \in \mathcal{C}_{bu}$ s.e. $f = g$ m.k. eli f:stä saadaan tasaisesti jatkuva määrittelemällä se uudelleen nollamitallisessa joukossa. Tämä kyllä pitää paikkansa, mutta sen osoittaminen ei näytä hevin onnistuvan ilman Lebesgue-pisteiden teoriaa [R2:Ch7]. Niinpä vastaus jätetään auki ja tehtävään palattaneen loppukurssista.

Tehtävä 6.2 ([Luku3] *helpohko, keskipitkä, eri metka*):
[R2:Exe3.7] **I** Joillain mitoilla (a) $r < s \implies L^r(\mu) \subset L^s(\mu)$; joillain mitoilla (b) $r < s \implies L^s(\mu) \subset L^r(\mu)$; joillain mitoilla (c) $r \neq s \implies L^s(\mu) \not\subset L^r(\mu)$. **II** Anna esimerkkejä näistä tilanteista $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ja etsi sellaisia ehtoja, joilla näitä tilanteita syntyy.

Vastaus: Olkoon $0 < r < s \le \infty$.
I (a) Olkoon $(X, \mathfrak{M}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \sigma)$ (tällöinhän merkitään $\mathcal{L}^p := L^p$). Jos $f \in \mathcal{L}^r =: \mathcal{L}^p$, niin $f(n) \to 0$[1] ja siis $\infty > \sup |f| = \|f\|_\infty$, joten $f \in L^r \cap L^\infty \subset L^s$ [teht5.4]. Siis

[1] Muutoin voitaisiin poimia $n_1 < n_2 < \ldots$ s.e. $|f_{n_k}| \ge \epsilon \ \forall k$, jolloin $\int_{\mathbb{N}} |f|^r = \sum_n |f(n)|^r \ge \sum_k |f(n_k)|^r \ge \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^r = \infty$..

$\ell^r \subset \ell^s$.

(b) $\mu(X) < \infty \Rightarrow L^s(\mu) \subset L^r(\mu)$ (esim. $L^p([0,1])$ tai $L^p(T)$). Tod.: Olkoon $f \in L^s$. Jos $s = \infty$, niin $\int |f|^r \leq \int \|f\|_\infty^r = \mu(X)\|f\|_\infty < \infty$. Jos $s < \infty$, niin ($p := s/r$, jolloin $rp = s$)

$$\int |f|^r \overset{\text{Hölder}}{\leq} \{\int (|f|^r)^p\}^{1/r}\|1\|_q = \|f\|_s^{s/r}\mu(X)^{1/q} < \infty. \qquad ////$$

(c) $r \neq s \Rightarrow L^r(\mathbb{R}) \not\subset L^s(\mathbb{R})$. Tod.: $\int_1^\infty x^a < \infty \iff a < -1$ ja $\int_0^1 x^a < \infty \iff a > -1$, joten $x^{-1/r}\chi_{[1,\infty[} \in L^s \iff s > r$ ja $x^{-1/r}\chi_{]0,1]} \in L^s \iff s < r$ (pätevät myös kun $s = \infty$). ////

(Huom.: yleensäkin suurilla p ongelmana on lokaalit suuret arvot ja pienillä p ongelmana on hidas vaimeneminen äärettömyydessä.

II Nyt mietitään, mitkä seikat yllä saivat aikaan halutut tulokset ja koitetaan esittää ne mahdollisimman yleisessä muodossa. Esim. kohdassa (a) 1° alla mukaillaan tapauksen ℓ^p todistusta. Kohdassa (a) vastaus on täydellinen (siis $\iff$), sen sijaan (b)-kohdassa täydellinen vastaus (välttämätön ja riittävä ehto) vaatisi lisätarkasteluja.

Olkoon $0 < r < s < \infty$.

(a) $L^r \not\subset L^s \iff \forall\epsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{M}\ (\mu(A) \in]0,\epsilon[)$. (Huom.: $L^p([0,1])$ ja $L^p(\mathbb{R})$ toteuttavat ehdon, ℓ^p ei.)

Todistus: 1° Olkoon $\epsilon > 0$ s.e. $\mu(A) \notin]0,\epsilon[\ \forall A \in \mathfrak{M}$. Olkoon $f \in L^r(\mu)$. Osoitetaan, että $f \in L^s(\mu)$.

$A_n := |f|^{-1}[n-1, n[\in \mathfrak{M}\ (n \in \mathbb{N})$. $\int_{A_1} |f|^s \leq \int_{A_1} |f|^r < \infty$.

$$n > 1 \Rightarrow \mu(A_n) = (n-1)^{-r}\int_{A_n}(n-1)^r \leq (n-1)^{-r}\|f\|_r^r < \infty.$$

Valitaan $N \in \mathbb{N}$ s.e. $\mu(A_n) = 0\ \forall n \geq N$ (tällaisen N olemassaolo johtuu tutkittavan μ:n erikoisuudesta: muutoinhan voitaisiin poimia jono $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ s.e. $\mu(A_{n_k}) \neq 0$ eli $\mu(A_{n_k}) \geq \epsilon$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, jolloin olisi $\int |f|^p \geq \sum_{k\in\mathbb{N}}(n_k - 1)\mu(A_{n_k}) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}}(n_k-1)\epsilon = \infty$).

Nyt $\mu(\{x \,|\, |f(x)| \geq N\}) = \mu(\uplus_{n\geq N} A_n) = \sum 0 = 0$, joten $\|f\|_\infty \leq N$ ja siis $f \in L^\infty$. Siis $f \in L^r \cup L^\infty \subset L^s$, joten $f \in L^s$.

2° Olkoon $\forall\epsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{M}\ (\mu(A) \in]0,\epsilon[)$. Konstruoidaan $f \in L^r \setminus L^s$.

Olkoon $a_1 := \mu(A_1) \in]0,1[$, olkoon $a_2 := \mu(A_2) \in]0, a_1/4[$, ..., olkoon $a_{n+1} := \mu(A_{n+1}) \in]0, a_n/4[\ \forall n$ (erityisesti $a_{n+j} \leq 4^{-j}a_n\ \forall n, j \in \mathbb{N}$). $B_n := A_n \setminus \cup_{k=n+1}^\infty A_k$, jolloin $b_n := \mu(B_n) \geq \frac{2}{3}a_n > a_{n+1} \geq b_{n+1}\ \forall n$, koska $\sum_{k=n+1}^\infty \mu(A_k) \leq \sum_{j=1}^\infty 4^{-j}a_n = a_n/3$, (erityisesti $b_n \to 0+$ aidon monotonisesti) ja joukot B_n ovat erillisiä. Korvataan jono $B_1, B_2, ...$ tarvittaessa osajonollaan, niin että $c_k := \mu(C_k) := \mu(B_{n_k}) < 1/k^2$.

$f := \sum_{n=1}^\infty \alpha_n\chi_{C_n}$, jolloin $\int |f|^p \overset{mon.konv.}{=} \sum_n \alpha_n^p c_n\ \forall p \in]0,\infty[$. Jos $s = \infty$, valitaan $\alpha_n = 1\ \forall n$, jolloin $\|f\|_\infty = \infty$, mutta $\int |f|^r \leq \sum_n 1(1/n^2) < \infty$.

Olkoon sitten $s < \infty$. $f \notin L^s$, kun valitaan $\alpha_n^s c_n = 1/n\ \forall n$ eli $\alpha_n := (c_n n)^{-1/s}$. Nyt $\alpha_n^{r-s} = (c_n n)^{(s-r)/s}$, joten $\alpha_n^r c_n = \alpha_n^{r-s}\alpha_n^s c_n = (c_n n)^{(s-r)/s}/n \leq (n^{-2}n)^{(s-r)/s}/n \leq n^{r/s-2}$, joten $\int f^r = \sum_n \alpha_n^r c_n < \infty$, sillä $r/s - 2 < 1$. Siis $f \in L^r \setminus L^s$.

(b) Jos $\mu(X) = \infty$, niin $1 \in L^\infty \setminus L^r$, kun $r \in]0,\infty[$. Jo Hölderin perusteella $L^s \not\subset L^r$-funktioiden kantajat ovat äärettömiä, joten seuraavan tuloksen saattaa arvata:

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M} \wedge \mu(A_n) \in]0,\infty[\ \forall n \wedge (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \wedge \sum_n \mu(A_n) = \infty \iff L^s \not\subset L^r$.

(Huom.: $L^p(\mathbb{R})$ ja ℓ^p toteuttavat yo. ehdon, $L^p([0,1])$ ja muut äärellismitalliset eivät.)

Todistus: 1° "$\Rightarrow$": Oletetaan $\iff$ -merkin vasen puoli todeksi ja konstruoidaan $f \in L^s \setminus \Lambda^r$:

Jos $s = \infty$, on $1 \in L^s \setminus L^r$.

Jos sitten $s < \infty$, toimitaan samaan tapaan kuin kohdassa (a) 2° yllä:

Olkoon $B_1 := A_1 \cup ... \cup A_{n_1}$ s.e. $b_1 := \mu(B_1) = \sum_{k=1}^{n_1}\mu(A_k) > 1$, $B_2 := A_{n_1+1} \cup ... \cup A_{n_2}$ s.e. $b_2 := \mu(B_2) > 1$ jne. (siis näin valitaan jono $n_1 < n_2 < ...$ ja sen määräämät erilliset $B_1, B_2, ...$).

$f := \sum_n \alpha_n\chi_{B_n} \Rightarrow \int f^r = \sum_n \alpha_n^r b_n$. Nyt halutaan, että $f \notin L^r$, joten valitaan $\alpha_n := (nb_n)^{-1/r}$, jolloin $\alpha_n^r b_n = 1/n$. $\alpha_n^s b_n = \alpha_n^{s-r}/n = (nb_n)^{(r-s)/r}/n \leq n^{(r-s)/r}/n = n^{-s/r}$ ja siis $\int f^s < \infty$ ////.

Jos sitten $\mu(X) < \infty$, niin $L^s \subset L^r$, kuten todettiin. Vastaus kata kaikkia mahdollisuuksia, sillä esim. tapaus $X = \{0\}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X\}$, $\mu(X) = \infty$ ei toteuta kumpaakaan ehtoa. Toisaalta siinä sisäkkäisyydetkään eivät ole selviä: Jokainen $f : X \to \mathbb{C}$ on triviaalisti vakiofunktio $f \equiv f(0)$. $f = 0 \Rightarrow f \in L^p\ \forall p$ ja $f \neq 0 \Rightarrow f \in L^\infty \setminus L^p\ \forall p \in]0,\infty[$. Siis $L^\infty = \{f : X \to X\}$ ja $L^p = \{0\}$ $p \in]0,\infty[$.

2° "$\Leftarrow$": Assume that the condition left of "$\iff$" is not true. Then, for any $A \in \mathfrak{M}$ with $\mu(A) > 0$, there is some $A' \subset A$ with $\mu(A') > 0$ that does not have a subset of smaller positive measure (i.e., $\mu(A'') \in \{0, \mu(A)\}$ for all measurable $A'' \subset A$).[2] Choose such $E_0 \subset X$, then choose such $E_1 \subset X \setminus E_0$, then such $E_2 \subset X \setminus (E_0 \cup E_1)$ etc. Since the sets E_k are disjoint and of positive measure, this process stops at some E_n (i.e., $\mu(N) = 0$, where $N := X \setminus E_0 \cup E_1 \cup \cdots \cup E_n$; w.l.o.g. we assume that $n \geq 0$, i.e., that $\mu(X) > 0$).

2.1° *Given any $A \in \mathfrak{M}$, there is some $K \subset \{0, ..., n\}$ s.t. $\mu(A \setminus E) = 0 = \mu(E \setminus A)$, where* $E = \cup_{k\in K} E_k$. (I.e., $\mathfrak{M}$ equals arbitrary unions of $E_0 \cup ... \cup E_n$ "plus" null sets.)

Proof: Let $A \in \mathfrak{M}$. Set $K := \{k \in \{0, ..., n\} \,|\, \mu(E_k \setminus A) = 0\}$. Then $\mu(E \setminus A) \leq \mu(\cup_{k\in K}(E_k \setminus A)) = 0.$. If $k \notin K$, i.e., $\mu(E_k \setminus A) > 0$, then $\mu(E_k \setminus A) = \mu(E_k)$, i.e.,

[2]Proof: Otherwise there are sets B_n with $A \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ and $\mu(B_1) > \mu(B_2) > \cdots$, so that we could take $A_n := B_n \setminus \cup_{k=n+1}^\infty B_k$ to obtain a contradiction.

$\mu(E_k \cap A) = 0$. Set $A_j := E_j \cap A$ ($j \in \{0, ..., n\}$). Then $A = (A \cap N) \cup (\cup_j A_j)$ (these sets being disjoint), hence $\mu(A \setminus E) = \mu(A \cap N) + \sum_{j \notin K} \mu(A_j) = 0$, QED.

2.2° *If f is measurable, then there is a simple function s s.t. $s = f$ a.e.* Proof: For any $k \in \{0, ..., n\}$, f equals some constant z_k a.e. on E_k.[3] Set $s := \sum_j z_j \chi_{E_j}$ to obtain 2.2°.

2.3° *Let s be measurable, hence of form $\sum_{j=0}^n z_j \chi_{E_j}$ (if redefined on a null set, i.e., replaced by a representative of the same equivalence class), by the above.*

Then $s \in L^\infty$. If $\mu(E_j) = \infty$ for some j s.t. $z_j \neq 0$, then $s \notin L^p$ for any $p \in (0, \infty)$, otherwise $s \in L^p$ for all $p \in (0, \infty)$. Therefore, $L^p = L^q \subset L^\infty$ for all $p, q \in (0, \infty)$, and $L^p = L^\infty$ iff $\mu(X) < \infty$.

Kommentti: *Siis ehdon jäädessä toteutumatta mitallisia ovat täsmälleen yksinkertaiset funktiot (tarkkaan ottaen niiden ekvivalenssiluokkien alkiot), ja ne kaikki ovat L^∞-funktioita, mutta L^r-funktioita ovat vain ne, jotka ovat nollia äärellismitallisen joukon ulkopuolella.*

(c)

Remark: *Consider two following three conditions:*

(i) $\mu(X) < \infty$;

(ii) there are sets of arbitrarily small positive measure, i.e., $\forall \epsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{M}\ [\mu(A) \in (0, \epsilon)]$;

(iii) there is an infinite number of disjoint sets of positive measure, i.e.,

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M} \wedge \mu(A_n) \in (0, \infty)\ \forall n \wedge (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \wedge \sum_n \mu(A_n) = \infty.$$

One can easily show that (ii) and (iii) are equivalent when $\mu(X) < \infty$. Moreover, all measure spaces belong to exactly one of the following four categories, and, whenever $0 < r < s < \infty$, we have

(1.) $\mu(X) < \infty$ but not (iii): Then $L^r = L^s = L^\infty$

(2.) $\mu(X) < \infty$ and (iii) holds: Then $L^\infty \subsetneq L^s \subsetneq L^r$.

(3.) $\mu(X) = \infty$ but not (iii): Then $L^s = L^r = \{$simple measurable L^1 functions$\}$[4] $\subseteq L^\infty = \{$simple measurable functions$\} = \{$measurable functions$\}$ (here we identify functions equal a.e.).

(4.) $\mu(X) = \infty$ and (iii) holds: Then $L^\infty \not\subset L^s \not\subset L^r \not\subset L^s \not\subset L^\infty$.

Kommentti: *I (b) Tapa 2:* $A_1 := \{|f| \leq 1\}$, $\int |f|^r \leq \int_{A_1} |f|^r + \int_{A_1^c} |f|^s \leq 1 \cdot \mu(X) + \|f\|_s < \infty$.

Tehtävä 6.3 *([Luku3]* vaikea, ufopitkä*):*
[R2:Exe3.14] Olkoon $1 < p < \infty$, $f \in \mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(]0, \infty[)$ ja

$$F(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \quad (0 < x < \infty).$$

(a) Todista Hardyn epäyhtälö

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p,$$

joka osoittaa, että kuvaus $f \mapsto F$ kuvaa $\mathcal{L}^p$:n $\mathcal{L}^p$:lle.
(b) Todista, että yhtäsuuruus pätee yllä joss $f = 0$ m.k..
(c) Todista, että vakio $\frac{p}{p-1}$ on pienin mahdollinen.
(d) Jos $\neg(f = 0$ m.k.$)$, $f \geq 0$ ja $f \in \mathcal{L}^1$, todista, että $F \notin \mathcal{L}^1$.
(e) Tulkitse kohdat (a)–(c) avaruuteen L^p ja kohta (d) avaruuteen L^1 (siis ekvivalenssiluokkien avaruuksiin).

Vastaus: *(a)*

$$\int_0^x |f(t)|\, dt \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\{ \int_0^x 1^q \right\}^{1/q} \left\{ \int_0^x |f(t)|^p \right\}^{1/p} \leq x^{1/q} \|f\|_p = x^{1-1/p} \|f\|_p < \infty,$$

joten $F(x)$ on määritelty $\forall x > 0$ ja $|F(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|\, dt \leq x^{-1/p} \|f\|_p$ (*).
1° *Olkoon $0 \leq f \in \mathcal{C}_c(]0, \infty[)$ (jolloin $0 \leq F \in \mathcal{C}$). $F'(x) = -x^{-2} \int_0^x f + x^{-1} f(x)$, joten $xF'(x) = -F(x) + f(x)\ \forall x$ (**). $(F(t)^p t)' = pF(t)^{p-1} F'(t) t + F(t)^p$, joten*

$$F(x)^p x - F(0)0 = \int_0^x pF(t)^{p-1} F'(t) t\, dt + \int_0^x F(t)^p\, dt$$

ja (mon. konv.) $\lim_{x \to \infty} F(x)^p x = p \int F^{p-1} F' t + \int F^p$. Valitaan $p' \in]1, p[$. Tällöin $F(x)^p x \overset{*}{\leq} (x^{-1/p'} \|f\|_{p'})^p x = x^{(p'-p)/p'} \|f\|_{p'}^p \to 0$. Niinpä $\int F^p = -p \int F^{p-1} F' t \overset{**}{=} p \int F^p - p \int F^{p-1} f$ (***) ja siis (huom.: $\frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, joten $q = \frac{p}{p-1}$)

$$\|F\|_p^p := \int F^p \overset{***}{=} \frac{p}{p-1} \int F^{p-1} f \overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{p-1} \{ \int (F^{p-1})^q \}^{1/q} \{ \int f^p \}^{1/p}$$

[3] Proof: If f is simple, then this is quite obvious (if $f = \sum_{j=0}^m z_j \chi_{A_j}$, with sets A_j being disjoint and of positive measure (this can be obtained by modifying f on a null set) and $\cup_j A_j = X$, then $\mu(E_k \setminus A_j) = 0$ for exactly one A_j). For general f, let a sequence s_n of such functions converge to f (with $s_n = \sum_{j=0}^n z_{n,j} \chi_{E_j}$). Then $z_j := \lim_{n \to \infty} z_{n,j} = f(x)$ exists for each $x \in E_j$.

[4] These are exactly simple measurable functions that are zero outside some null set

$$= \frac{p}{p-1}(\int F^p)^{1/q}\|f\|_p = \frac{p}{p-1}\|F\|_p^{p-1}\|f\|_p,$$

mistä seuraa, että $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

2° *Olkoon* $f \in \mathcal{C}_c$. $0 \le g := |f| \in \mathcal{C}_c$, *jolloin* $G \ge |F|$ *ja* $\|F\|_p \le \|G\|_p \le \frac{p}{p-1}\|g\|_p = \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

3° *Olkoon* $f \in L^p$. *(Nyt "käytetään tiheysargumenttia", eli hyödynnetään* $\mathcal{C}_c$*-funktioiden tiheyttä.) Olkoon* $\mathcal{C}_c \ni f_n \underset{L^p}{\to} f$ *[R2:3.14].*
(i) Nyt $F_n(x) \to F(x)\ \forall x$.
Tod.: *Olkoon* $x \in]0,\infty[$. $|F(x) - F_n(x)| \le \frac{1}{x}\int_0^x |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, *kun* $\int_0^x |f_n - f| < \epsilon x$, *kun* $x^{1-1/p}\|f_n - f\|_p < \epsilon x$ *[(*)], kun* $\|f_n - f\|_p < \epsilon x^{1/p}$, *kun* $n \ge N_{\epsilon x^{1/p}}$ *(lue oik.→vas.).* ////
(ii) $F_n \underset{L^p}{\to} F$.
Tod.: *Lisäksi* $\{F_n\}$ *on* L^p*-Cauchy-jono, sillä* $\|F_n - F_m\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f_n - f_m\| < \epsilon$, *kun* $n, m \ge N'_{\frac{p-1}{p}\epsilon}$. *Niinpä* $F_n \underset{L^p}{\to} G$ *(koska* L^p *on täydellinen). Siis* $F_{n_k} \to G$ m.k. *[R2:3.12] (siis jokin osajono suppenee pisteittäin m.k.), joten* $F(x) = \lim_k F_{n_k}(x) = G(x)$ m.k. x, *siis* $F = G \in L^p$ *(m.k., siis* L^p*:n alkiona), erityisesti* $\|F_n - F\|_p = \|F_n - G\|_p \to 0$.////
(iii) $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.
Tod.: $F_n \underset{L^p}{\to} F \Rightarrow \|F_n\|_p \to \|F\|_p$, *koska* $|\|F_n\|_p - \|F\|_p| \le \|F_n - F\|_p \to 0$, *joten*

$$\|F(x)\|_p = \lim_n \|F_n(x)\|_p \overset{2^\circ}{\le} \lim_n \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p = \frac{p}{p-1}\|f\|_p. \qquad ////$$

(b) Tässä kohdassa tarvitsemme seuraavia mitallisia funktioita koskevia lemmoja (kolme ensimmäistä pätevät kaikissa mitta-avaruuksissa):

Lemma 1 $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \wedge 1 \le p \le \infty \wedge h_n \underset{L^p}{\to} h \wedge g_n \underset{L^q}{\to} g \Rightarrow \int h_n g_n \to \int hg.$$

Tod.: $$|\int h_n g_n - \int hg| = \int[h_n(g_n - g) + (h_n - h)g] \le \int |h_n||g_n - g| + \int |h_n - h||g|$$
$$\le \|h_n\|_p\|g_n - g\|_q + \|h_n - h\|_p\|g\|_q \to \|h\|_p 0 + 0\|g\|_q = 0. \qquad ////$$

Lemma 2 [R2:Exe3.24] $$0 < p < \infty \wedge 0 \le g_n \underset{L^p}{\to} g \ge 0 \Rightarrow \int g_n^p \to \int g^p.$$

Lemma 3 [R2:Exe3.17] $0 < p < \infty \wedge g_n(x) \to g(x)$ m.k. $\wedge \|g_n\|_p \to \|g\|_p \Rightarrow g_n \underset{L^p}{\to} g$.

Lemma 4 *Jos* $h \in L^p(]0,\infty[)$ *ja* $H = \int_0^x h$, *niin* $H \in \mathcal{C}(]0,\infty[)$.
Tod.: *Jos* $x > 0$ *ja* $\epsilon > 0$, *niin* $h \in L^1(]0,2x[)$ *(vrt. [*]), joten voidaan valita* $\delta > 0$ *s.e.* $E \subset]0,2x[\wedge m(E) < \delta \Rightarrow \int_E |h| < \epsilon$. $\delta' := \min\{\delta, x\}$. *Jos* $|x - x'| < \delta'$, *niin* $|H(x) - H(x')| \le \int_{[x,x']} |h| < \epsilon$. ////

Erityisesti F *on jatkuva, koska se on kahden jatkuvan funktion tulo.*

Lemma 5 $$0 \le f \in L^p(]0,\infty[) \Rightarrow \int F^p = \frac{p}{p-1}\int F^{p-1} f$$

Todistus: *Yhtälö on tosi* $\mathcal{C}_c$*-funktioilla [1°]. Niinpä valitaan nyt* $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_c$ *s.e.* $0 \le f_n \underset{L^p}{\to} f$ *[R2:3.14]. Nyt* $F_n(x)^{p-1} \to F(x)^{p-1}\ \forall x$ *[(a)3° i] ja* $F_n^{p-1} \underset{L^q}{\to} F^{p-1}$, *koska*

$$\|F_n^{p-1}\|_q^q = \int (F_n^{p-1})^q = \int F_n^p \overset{Lemma2}{\to} \int F^p = \|F^{p-1}\|_q^q.$$

Niinpä $F_n^{p-1} \underset{L^q}{\to} F^{p-1}$ *[Lemma 3] ja siis* $\int F_n^{p-1} f_n \to \int F^{p-1} f$ *[Lemma 1]. Siis*

$$\int F^p = \lim_n \int F_n^p \overset{***}{=} \lim_n \frac{p}{p-1}\int F_n^{p-1} f_n = \frac{p}{p-1}\int F^{p-1} f. \qquad ////$$

Nyt varsinaiseen (b)-kohdan todistukseen: Jos olisi $g \in L^p$ *s.e.* $\neg(g = 0$ m.k.) *ja* $\|G\|_p = \frac{p}{p-1}\|g\|_p$, *niin (*$f := |g|$*) olisi* $\|F\|_p \ge \|G\|_p = \frac{p}{p-1}\|g\|_p = \frac{p}{p-1}\|f\|_p$ *ja siis (yllä* $\ge$*-merkin on a-kohdan perusteella oltava* $=$*) kohdan* 1° *kaksirivinen kaava olisi voimassa [Lemma 5] ja siinä Hölderin epäyhtälön sovelluksessa olisi oltava yhtäsuuruus [1°], mistä seuraa [R2:s.65], että* $\alpha f^p = \beta(F^{p-1})^q$ m.k. *joillain* α, β, *missä* $\neg(\alpha = 0 = \beta)$. *Siis* $F^p = (F^{p-1})^q = (\alpha/\beta) f^p$ m.k., *eli* $F = \gamma f$ m.k. *jollain* $\gamma > 0$ *(jos* $\alpha = 0$ *tai* $\beta = 0$ *niin selvästi molemmat olisivat nollia RR;* $f, F \ge 0 \Rightarrow \gamma \ge 0$*).*
$F \in \mathcal{C}$ *[Lemma 4], joten* $f = \gamma^{-1}F \in \mathcal{C}$ *(ainakin* $f = \gamma^{-1}F =: h$ m.k. *ja selvästi* $F = H$, *joten voidaan tarvittaessa vaihtaa* f *funktioon* h*). Nyt* $F' = (-F + f)/x$, *joten* $F \in \mathcal{C}^1$ *ja siis* $f \in \mathcal{C}^1$, *joten* $\exists F'' \in \mathcal{C}$ *jne., siis induktiolla* $F, f \in \mathcal{C}^\infty(]0,\infty[)$. *Lisäksi* f *toteuttaa yhtälön* $x\gamma f' = -\gamma f + f$, *jonka ainoa ratkaisu välillä* $]0,\infty[$ *on (a mielivaltainen)* $f = ax^r \notin L^p(]0,\infty[)$, *missä* $r = \gamma^{-1} - 1 = (p-1)^{-1}$. *Siis ei voi olla* $f \in L^p$.

(c) $f := x^{-1/p}\chi_{[1,R]} \in L^p$.

$$F(x) = x^{-1}\int_1^x f = x^{-1}[\frac{x^{1-1/p}}{1-1/p} - \frac{1^{1-1/p}}{1-1/p}] = \frac{p}{p-1}(x^{-1/p} - x^{-1}9 = \frac{p}{p-1}(1 - x^{1/p-1})f,$$

kun $1 \le x \le R$. *Olkoon* $\delta > 0$. *Valitaan* $r > 1$ *s.e.* $r^{1/p-1} < \delta$, *valitaan* $R > r$ *s.e.* $\int_r^R x^{-1} > \int_1^r x^{-1}/\delta$, *jolloin* $\int f^p = \int_1^r x^{-1} + \int_r^R x^{-1} \le (1+\delta)\int_r^R x^{-1}$. *Nyt*

$$\int F^p \ge \int_r^R F^p \ge \int_r^R (\frac{p}{p-1})^p (1-\delta)^p f^p \ge (\frac{p}{p-1})^p (1-\delta)^p (1+\delta)^{-1}\int f^p,$$

eli $\|F\|_p \ge (1-\delta)(1+\delta)^{-1/p}\frac{p}{p-1}\|f\|_p$ *joten, jos* $a < \frac{p}{p-1}$, *niin* $\|F\|_p > a\|f\|_p$, *kun* $\delta > 0$ *valitaan riittävän pieneksi ja* R *valitaan kuten edellä.*

(d) Olkoon $f \geq 0$. Ellei $f = 0$ m.k., niin $\exists R > 0$ s.e. $\int_0^R f > \frac{1}{2}\int_0^\infty f =: a$. Nyt $F(x) \geq ax^{-1}$ $\forall x \geq R$, joten $\int_0^\infty F \geq \int_R^\infty F \geq \int_R^\infty ax^{-1} = \infty$.

(e) Tulkinnat: Voidaan merkitä $L := \{[f] \,|\, f \in \mathcal{L}\}$, missä $[f] := \{g \in \mathcal{L} \,|\, g = f$ m.k.$\}$ on $[f]$:n ekvivalenssiluokka. Tällöin $L^p \subset L$ $\forall p \in]0, \infty[$.
Koska $f = g$ m.k. $\Rightarrow \int f = \int g$ (kun m.k. ja $\int$ viittaavat samaan mittaan), niin F riippuu vain $[f]$:stä, ei itse f:stä; tulkitaan nyt F tarkoittamaan luokkaa $[F]$. Huom.: $g \in [f] \Rightarrow \|g\|_p = \|f\|_p$, joten luokan normi voidaan määrittää mistä tahansa luokan jäsenestä.
(a) $f \mapsto F$ (oikeastaan $[f] \mapsto [F]$) kuvaa L^p:n L^p:lle (ts. $[f] \in L^p \Rightarrow [F] \in L^p$).
(b) Yhtäsuuruus joss $[f] = [0]$ (ts. jokainen $[f]$:n edustaja $= 0$ m.k.).
(c) Triviaalisti vakio $\frac{p}{p-1}$ on yhä pienin mahdollinen.
(d) Jos $[f] \neq [0]$ ja $[f] \geq 0$ (ts. $g \geq 0$ m.k. jokaisella $g \in [f]$), niin $[F] \notin L^1$.
(Huom.: Kohdissa (b) ja (d) sana "jokainen"olisi voitu korvata sanalla "jokin", koska $f = g$ m.k. on ekvivalenssirelaatio.)

Kommentteja: *$\otimes$: $\exists N$ s.e. $m(N) = 0 \wedge f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in N^c$. $h_n := f_n\chi_{N^c}$, $h := f\chi_{N^c}$, jolloin $h_n(x) \to h(x)$ $\forall x$. Nyt [dom.konv.] $\int f_n = \int h_n \to \int h = \int f$, missä ulommat yhtäsuuruudet seuraavat siitä, että vastaavat integrandit ovat samoja m.k.*
(Näin siis todistetaan, että dom. konv. lauseessa riittää $f_n \to f$ m.k., jos f tiedetään mitalliseksi tai tutkittava mitta on täydellinen (jolloin f:n mitallisuus seuraa siitä, että $g \in \mathcal{L}$ ja $f = g$ m.k.). Vastaavasti monissa muissakin lauseissa riittää olettaa suppeneminen ja majorointi m.k., jos tiedetään rajafunktion mitallisuus tai jos tutkittava mitta on täydellinen.)

Tehtävä 6.4 *([Luku4]* helpohko, nopeahko, tärkeähkö*):*
Olkoon M Hilbert-avaruuden H aliavaruus. Onko totta, että $(M^\perp)^\perp = M$?

Vastaus: *Aliavaruuden sulkeuma on aina aliavaruus (jos $x, y \in \bar{M}$, niin $M \ni x_n \to x \wedge M \ni y_n \to y$ ja siis $x + y = \lim_n x_n + \lim_n y_n = \lim_n(x_n + y_n) \in \bar{M}$, αx vast.).*
$M^\perp = (\bar{M})^\perp$, sillä triviaalisti $y \perp \bar{M} \Rightarrow y \perp M$ ja toisaalta $(x, y) = 0$ $\forall x \in M \Rightarrow (x, y) = 0$ $\forall x \in \bar{M}$, koska $(\cdot, y)$ on jatkuva [R2:4.6].
$(M^\perp)^\perp = \bar{M}$ (ja siis kysymyksen väite ei aina ole totta), mikä nähdään seuraavasti:
1° $(M^\perp)^\perp \supset \bar{M}$. Tod.: $x \in \bar{M} \Rightarrow (x, y) = 0$ $\forall y \in M^\perp \Rightarrow x \in (M^\perp)^\perp$.
2° $(M^\perp)^\perp \subset \bar{M}$. Tod.: Olkoon $x \in (M^\perp)^\perp$. $x = Px + Qx$, missä $Px \in \bar{M}$ ja $Qx \in \bar{M}\perp = M^\perp$ [R2:4.11a]. Koska $x \perp Qx$, on $0 = (x, Qx) = (Px + Qx, Qx) = (Px, Qx) + (Qx, Qx) = 0 + \|Qx\|^2$ eli $Qx = 0$, joten $x = Px + 0 = Px \in \bar{M}$.

Tehtävä 6.5 *([Luku4]* keskitasoa, keskipitkä*):*
[R2:Exe4.6(alku)] Olkoon $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormaali joukko Hilbert-avaruudessa H. (a) Osoita, että tämä joukko on suljettu ja rajoitettu, muttei kompakti (niitä avaruuksia (esim. $\mathbb{R}^k$), joiden suljetut ja rajoitetut osajoukot ovat kompakteja, sanotaan Heine–Borel-avaruuksiksi).
(b) Olkoon $Q := \{\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n \,\big|\, |c_n| \leq \frac{1}{n}$ $\forall n\}$. Todista, että Q (eli Hilbertin kuutio) on kompakti (älä ravista Q:ta, Samu on upottanut sinne kaikenlaista).

Vastaus: *(a) $n \neq m \Longrightarrow \|u_n - u_m\| = \sqrt{2}$, sillä $\|u_n - u_m\|^2 = (u_n - u_m, u_n - u_m) = (u_n, u_n) - 2(u_n, u_m) + (u_m, u_m) = 1 - 0 + 1 = 2$.*
$F := \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on suljettu, sillä jos $x \in G := F^c$, niin on olemassa enintään yksi n_u s.e. $\|x - u_{n_u}\| < 1/2$ (muutenhan $\sqrt{2} = \|u_{n_u} - u_{n'_u}\| \leq \|u_{n_u} - x\| + \|x - u_{n'_u}\| < 1/2 + 1/2$ RR). Jos tällainen on olemassa, $\delta := \|x - u_{n_u}\| > 0$, muutoin $\delta := 1/2$. Nyt $B_\delta(x) := \{y \in H \,|\, \|x - y\| < \delta\} \subset G$, joten $x \in G^o$. Koska x oli mv., $G = G^o \subset_o H$ ja siis $F = G^c \subset_c H$.
Selvästi $\|u_n\| = 1 \leq 1$ $\forall u_n \in F$, joten F on rajoitettu (*).
F ei ole kompakti: $\{B_{1/2}(u_n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ on F:n ääretön avoin peite, mutta jokainen u_n kuuluu vain yhteen $B_{1/2}(u_n)$, joten mikään osapeite ei peitä joukkoa F.

(b) Huom.: jos $y_n \to y$, niin myös jokainen jonon $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ osajono suppenee y:hyn (ts. $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \Rightarrow y_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} y$ (htll)) (tämä pätee kaikissa topologisissa avaruuksissa). Metrisen avaruuden osajoukko Q on kompakti joss jokaisella sen jonolla on johonkin Q:n pisteeseen suppeneva osajono [R1:2.41Remark].

Olkoon $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Q$. On siis todistettava, että jokin sen osajono suppenee johonkin $a \in Q$, mikä tehdään seuraavassa erästä kieroa temppua (ns. diagonaaliargumenttia*) käyttäen: $x_n(k) := (x_n, u_k)$ (ts. $x_n = \sum_k x_n(k)u_k$ $\forall n$, vrt. [R2:4.14]). Tällöin $x_n(k) \in \bar{B}_{1/k}(0) \subset_K \mathbb{C}$ $\forall n, k$.*

Erityisesti $x_n(1) \in \bar{B}_1(0) \subset_K \mathbb{C}$ $\forall n$. Niinpä jokin osajono $x_{n_1^1}(1), x_{n_2^1}, x_{n_3^1}, \ldots$ suppenee johonkin $a_1 \in \bar{B}_1$ (ts. on olemassa kokonaisluvut $n_1^1 < n_2^1 < n_3^1 < \ldots$ s.e. $x_{n_k^1}(1) \to a_1$, kun $k \to \infty$).

Koska $x_{n_k^1}(2) \in \bar{B}_{1/2}(0) \subset_K \mathbb{C}$ $\forall n$, kuten edellä todettiin, voidaan poimia jokin jonon $n_1^1, n_2^1, n_3^1, \ldots$ osajono $n_1^2, n_2^2, n_3^2, \ldots$ s.e. $x_{n_k^2}(2) \to a_2 \in \bar{B}_{1/2}(0)$ (koska ko. jono on edellisen osajono, yhä $x_{n_k^2}(1) \to a_2$). Jatketaan näin (kun $\{n_k^m\}_{k\in\mathbb{N}}$ on valittu jollain m, valitaan sen osajono $\{n_k^{m+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ s.e. $x_{n_k^{m+1}}(m+1) \to a_{m+1} \in \bar{B}_{1/(m+1)}(0)$).

Nyt merkitään $N_k := n_k^k$ $\forall k$. Mielivaltaisella $m \in \mathbb{N}$ jono $\{N_k\}_{k=m}^\infty$ on jonon $\{n_k^m\}_{k\in\mathbb{N}}$ osajono, joten $x_{N_k}(m) \overset{k\to\infty}{\to} a_m$. Tästä seuraa, että $x_{N_k} = \sum_m x_{N_k}(m)u_m \to \sum_m a_m u_m =: y$, mikä nähdään seuraavasti:

Olkoon $\epsilon > 0$ on annettu. Valitaan M s.e. $\sum_{m=M+1}^\infty (2/m)^2 < \epsilon^2/2$ (*). Valitaan K s.e. $|x_{N_k}(m) - a_m| < \epsilon/\sqrt{2M}$ $\forall k \geq K$ $\forall m \leq M$ (ts. valitaan K_m jokaiselle $m \in \{1, \ldots, M\}$ ja merkitään $K := \max_m K_m$). Jos $k \geq K$, niin (koska

$|x_n(m) - a_m| \leq |x_n(m)| + |a_m| \leq 2/m \ \forall m$)

$$\|x_{N_k}-y\|^2 \overset{4.18iii}{=} \sum_{m\in\mathbb{N}} |(x_{N_k}-y,u_m)|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} |x_{N_k}(m)-a_m|^2 < \sum_{m=1}^{M} (\epsilon/\sqrt{2M})^2+\epsilon^2/2 = \epsilon^2,$$

joten $x_{N_k} \to y$, *QED.*

Kommentteja: Hilbertin kuutio *määritellään usein* $Q := [0,1]^{\mathbb{N}}$ *[T2]; ko. avaruus on kuitenkin homeomorfinen (topologiaisomorfinen) em. avaruuden kanssa.*
Rajoitettuus: *Olkoon* X *metrinen avaruus ja* $A \subset X$. $d(A) := \sup_{a,b\in A} d(a,b)$ *on* A*:n halkaisija* ($d(\emptyset) := 0$). A *on rajoitettu joss* $d(A) < \infty$. *Ekvivalentti (htl) määritelmä on:* A *on rajoitettu joss on olemassa* $x \in X$ *ja* $R > 0$ *s.e.* $A \subset B_R(x)$ *eli* $d(x,r) < R \ \forall a \in A$ *(tässä alkio* x *voidaan kiinnittää määritelmän muuttumatta (htl)). Niinpä sisätuloavaruuksissa (ja muissakin normiavaruuksissa)* A *on rajoitettu joss* $\exists M \ \forall a \in A$ ($\|a\| \leq M$).

(b) Kohdan [R2:4.18iii] on oikeutettu, koska jos $\{u_n\}_n$ *täydennetään maksimaaliseksi joukoksi* $\{u_n\}_n \uplus \{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *[R2:4.22], niin selvästi* $z \in Q \Rightarrow (z, v_\alpha) = 0 \ \forall\alpha$.

Q:n kompaktisuuden saa todistettua myös toteamalla (htp), että $f : [-1,1]^{\mathbb{N}} \ni \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_n (a_n/n)u_n \in Q$ *on jatkuva ja* $f[-1,1]^{\mathbb{N}} = Q$, *koska* $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ *on kompakti (Tihonovin lauseen [T2:18.1] mukaan kaikki kompaktien joukkojen karteesiset tulot ovat kompakteja) (itse asiassa* f *on homeomorfismi, mikä selviää lisätarkasteluilla).*

Kolmas tapa olisi ollut todistaa Q *totaalisti rajoitetuksi: Metrisen avaruuden* X *osajoukko* Q *on* **totaalisti rajoitettu** *(*totally bounded*) joss jokaisella* $\epsilon > 0$ *voidaan* Q *peittää äärellisen monella* ϵ*-säteisellä pallolla [T2:teht7.7] ([T2] = Jussi Väisälä: "Topologia II"Limes 1983, n. 40 mk* *(tätä mainostilaa voi vuokrata osoitteesta kalle.mikkola@hut.fi)* *).*

Tehtävä 6.6 *([Luku4]* helpohko, lyhyehkö*):*
Olkoon $H := \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \,\big|\, f \text{ on mitallinen ja } \int_0^\infty e^{-x}|f(x)|^2\,dx < \infty\}$.

$$(f,g) := \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)\,dx \quad \forall f,g \in H.$$

Osoita, että $(\cdot,\cdot)$ *on skalaaritulo. (a) Miten osoittaisit, että* H *on Hilbert-avaruus? Laguerren polynomit*

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}(-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right] \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

muodostavat maksimaalisen ortonormaalin joukon H:ssa (ts. H:n Hilbert-kannan). (b) Määritä summan $\sum_{n=0}^\infty (f,L_n)L_n$ *kaksi ensimmäistä termiä, kun* $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Vastaus: *(a)* $X := \mathbb{R}_+$. *Olkoon* $\mu(E) := \int_E e^{-x}\,dm \ \forall E \in \mathfrak{M} := \mathfrak{M}_{\mathbb{R}_+}$. *Tällöin* $(L^2(\mu))^2 \ni f,g \mapsto (f,g) := \int_X f(x)\bar{g}(x)e^{-x}\,dx = \int_X f(x)\bar{g}(x)\,d\mu(x)$ *[R2:1.29], joten* (f,g) *on Hilbert-avaruuden* $L^2(\mu) := L^2((X,\mu);\mathbb{C})$ *sisätulo [R2:4.5b]. Kun* $f,g \in H = L^2((X,\mu);\mathbb{R})$, *tehtävän sisätulo yhtyy yllä määriteltyyn sisätuloon (koska* $\bar{g} = g$ *kun* g *on reaalinen). Niinpä reaalikertoimisen sisätuloavaruuden ehdot (kuten [R2:4.1], mutta* X*:n on oltava reaalikertoiminen vektoriavaruus ja ehdoissa* $\alpha \in \mathbb{R}$ *riittää) seuraavat kompleksisista vastineistaan (ne voitaisiin kyllä todistaa erikseenkin). Avaruuden täydellisyys nähdään esim. seuraavasti: Jos* $\{f_n\}$ *on H:n Cauchy-jono,* $f_n \underset{L^2(\mu)}{\to} f$ *jollain* $f \in L^2(\mu)$. *Jollain osajonolla* $f_{n_k} \to f$ m.k. *[R2:3.12], joten* $f(x) \in \mathbb{R}$ m.k. x, *ts. kaikilla* $x \in N^c$, *missä* $\mu(N) = 0$. *Tällöin* $f\chi_{N^c} \in H$ *ja* $\|f_n - f\chi_{N^c}\|_2 = \|f_n - f\|_2 \to 0$, *joten* $f_n \underset{H}{\to} f\chi_{N^c}$, *siis H on täydellinen, joten H on reaalikertoiminen Hilbert-avaruus (samoin nähdään, että jokainen* $L^2((X,\mu),\mathbb{R})$ *on reaalikertoiminen Hilbert-avaruus).*

(b) $L_0 = e^x e^{-x} = 1$, $L_1 = -e^x(e^{-x} - xe^{-x}) = -1 + x$. *Olkoon* $f(x) \equiv x$.

$$(f,L_0) = \int_X fL_0\,d\mu = \int_X x \cdot 1 \cdot e^{-x}\,dm(x) = \Big|_0^\infty - e^{-x}x - \int_0^\infty -e^{-x} = 0 + \Big|_0^\infty e^{-x} = 1.$$

$$(f,L_1) = \int_0^\infty x \cdot (-1+x)e^{-x}\,dx = ... = -1 + 2 = 1.$$

Niinpä vektoreiden L_0 *ja* L_1 *virittämän aliavaruuden* $\mathrm{span}(\{L_0,L_1\})$ *vektoria f lähin piste [R2:4.14b] (oikeastaan ko. lause on todistettu [R2]:ssa vain kompleksikertoimisille Hilbert-avaruuksille, mutta se voidaan todistaa reaalikertoimisillekin) on* $(f,L_0)L_0 + (f,L_1)L_1 = 1L_0 + 1L_1 = 1 + (-1+x) = x = f$. *Tämä olikin ennalta tiedossa, sillä* $f \in \mathrm{span}(\{L_0,L_1\})$ *(koska* $f = 1L_0 + 1L_1$*).*

———————————

Vihjeitä: **6.1**: *(a) todista väite ensin* $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$*:lle (sehän on* $L^p(\mathbb{R})$*:n aliavaruus), sitten [R2:3.14] jne.).*
6.3: *(a) Oleta ensin, että* $f \geq 0$ *ja* $f \in \mathcal{C}_c(]0,\infty[)$. *Osittaisintegroinnin perusteella* $\int_0^\infty F^p = -p\int_0^\infty xF^{p-1}F'$. *Huomaa, että* $xF' = f - F$ *ja sovella Hölderiä integraaliin* $\int F^{p-1}f$. *Johda sitten yleinen tapaus tästä. (c) Valitse* $f(x) = x^{-1/p}\chi_{[1,A]}$.
6.5b: *Metrisen avaruuden osajoukko Q on kompakti joss jokaisella sen jonolla on johonkin Q:n pisteeseen suppeneva osajono [R1:2.41Remark].*
6.6: *[R2:1.29].*