Mat-1.150 Reaalianalyysi 5. harj. vastauksineen ti 18.10.1994 (2 sivua)

Tehtävä 5.1 ([3.6] *helppo, erittäin lyhyt, tärkeähkö*):
Olkoon $0 < p < \infty$. Olkoon $f : X \to \mathbb{C}$ mitallinen ja $\|f\|_p^p := \int_X |f|^p \, d\mu < \infty$ (eli $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$). Osoita, että jokaisella $\epsilon > 0$

$$\mu(\{x \mid |f(x)| \geq \epsilon\} \leq \epsilon^{-p} \int_X |f|^p.$$

(Todennäköisyyslaskennassa tämä epäyhtälö on tunnettu Čebyčevin[1] epäyhtälönä.)

Vastaus: $A_\epsilon := \{x \mid |f(x)| \geq \epsilon\}$.

$$\mu(A_\epsilon) = \int_{A_\epsilon} 1 = \epsilon^{-p} \int_{A_\epsilon} \epsilon^p \leq \epsilon^{-p} \int_{A_\epsilon} |f|^p \leq \epsilon^{-p} \int_X |f|^p, \quad \text{QED.}$$

(Huom.: jos $f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^p$, niin epäyhtälö on automaattisesti tosi. Se siis pätee kaikilla $f \in \mathcal{L}(\mu)$.)

Tehtävä 5.2 ([3.1] *helpohko, lyhyehkö*):
Osoita, että jokaisella konveksilla $\phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ on jokaisessa pisteessä $t \in]a,b[$ oikeanpuoleinen derivaatta $\frac{d^+}{dt}\phi(t)$ ja vasemmanpuoleinen derivaatta $\frac{d^-}{dt}\phi(t)$ ja että $\frac{d^-}{dt}\phi(t) \leq \frac{d^+}{dt}\phi(t)$. (Vihje: [R2:3.1(2)].)

Vastaus: Konveksilla funktiolla ϕ pätee aina $\forall \lambda \in [0,1],\ x, y \in]a,b[$
$\phi(x + \lambda(y-x)) = \phi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\phi(x) + \lambda\phi(y) = \phi(x) + \lambda(\phi(y) - \phi(x))$
Lisäksi $t < u \leq v < b \implies \frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} \leq \frac{\phi(v)-\phi(t)}{v-t}$ (*), koska (merkitään $\lambda := \frac{u-t}{v-t}$)

$$\frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} = \frac{\phi(t+\lambda(v-t)) - \phi(t)}{\lambda(v-t)} \leq \frac{\phi(t) + \lambda(\phi(v)-\phi(t)) - \phi(t)}{\lambda(v-t)} \leq \frac{\lambda(\phi(v)-\phi(t))}{\lambda(v-t)}.$$

Olkoon $a < t' < t$. Merkitään $\beta := \inf_{u>t} \frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} < \infty$. Kaavan [R2:3.1(2)] perusteella $\frac{\phi(t)-\phi(t')}{t-t'} \leq \beta$, joten $\beta \in]-\infty, \infty[$. Nyt $\frac{d^+}{dt}\phi(t) = \beta$, koska jos $\epsilon > 0$, niin on olemassa $u_\epsilon > t$ s.e. $\frac{\phi(u_\epsilon)-\phi(t)}{u_\epsilon - t} - \beta < \epsilon$ ja tällöin $0 \leq \frac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t} - \beta < \epsilon\ \forall u \in]t, u_\epsilon[$ kaavan (*) perusteella. Aivan samoin nähdään, että $\frac{d^-}{dt}\phi(t) = \sup_{s<t} \frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s}$. Kaavan [R2:3.1(2)] perusteella $\frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} \leq \frac{d^+}{dt}\phi(t)\ \forall s \in]a,t[$ ja siis $\frac{d^-}{dt}\phi(t) \leq \frac{d^+}{dt}\phi(t)$. (Huom.: $\exists \phi'(t) \iff \frac{d^-}{dt}\phi(t) = \frac{d^+}{dt}\phi(t)$.)

[1] translitteroitaessa kyrillisiä kirjaimia latinalaisiksi suomalaisissa ei-tieteellisissä julkaisuissa on tapana tehdä mm. korvaus č↦tš

Tehtävä 5.3 ([3.1] *keskitasoa, lyhyehkö*):
Osoita, että jos $\phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ on jatkuva ja toteuttaa ehdon

$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi(y))\ \ \forall x, y \in]a,b[,$$

niin ϕ on konveksi (jatkuvuus on olennainen vaatimus).

Vastaus: <u>Lemma:</u> Mielivaltaisilla $x, y \in]a,b[$ pätee
$k, n \in \mathbb{N} \wedge k \leq 2^n \implies \phi(x + k2^{-n}(y-x)) \leq \phi(x) + k2^{-n}(\phi(y) - \phi(x))$.
<u>Tod.:</u> (induktiolla) 1° $n = 1$: tosi oletuksen perusteella.
2° $n = m$ OK $\implies n = m+1$ OK: Jos $k = 2i$ ($i \leq 2^n/2 = 2^m$), niin $k2^{-n} = i2^{-m}$ ja väite on tosi tapauksen $n = m$ perusteella. Jos $k = 2i+1$ ($i < 2^n/2 = 2^m$), niin

$$\begin{aligned}
\phi\left(x + k2^{-n}(y-x)\right) &= \phi\left(\frac{1}{2}[x + i2^{-m}(y-x) + x + (i+1)2^{-m}(y-x)]\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\phi\left(x + i2^{-m}(y-x)\right) + \frac{1}{2}\phi\left(x + (i+1)2^{-m}(y-x)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}[\phi(x) + i2^{-m}(\phi(y)-\phi(x))] + \frac{1}{2}[\phi(x) + (i+1)2^{-m}(\phi(y)-\phi(x))] \\
&= \phi(x) + k2^{-m-1}(\phi(y) - \phi(x)). \qquad ////
\end{aligned}$$

Jos nyt $x, y \in]a,b[$ ja $0 \leq \lambda \leq 1$, niin on olemassa rationaalilukujen $r_j = k_j 2^{-n_j}$ jono s.e. $r_j \to \lambda$ (esim. $r_j := \lfloor 2^j\lambda \rfloor 2^{-j} \Rightarrow 0 \leq \lambda - r_j = 2^{-j}(2^j\lambda - \lfloor 2^j\lambda \rfloor) < 2^{-j} \to 0$), joten

$$\phi(x + \lambda(y-x)) = \lim_j \phi(x + r_j(y-x)) \leq \lim_j [\phi(x) + r_j(\phi(y) - \phi(x) = \phi(x) + \lambda(\phi(y) - \phi(x)).$$

Tehtävä 5.4 ([3.6] *helpohko, erittäin nopea, tärkeä*):
Osoita, että jos $0 < r \le p \le s < \infty$ ja $f \in \mathcal{L}^r(\mu) \cap \mathcal{L}^s(\mu)$, niin $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. (Vihje: jaa X sopiviin osiin.)

Vastaus: Merkitään $A := \{x \mid |f(x)| \le 1\} \in \mathfrak{M}$.

$$\int_X |f|^p \le \int_A |f|^p + \int_{A^c} |f|^p \le \int_A |f|^r + \int_{A^c} |f|^s \le \int_X |f|^r + \int_X |f|^s < \infty, \qquad QED.$$

Huom.: väite pätee aina, kun $0 < r \le p \le s \le \infty$, sillä $p = \infty \Rightarrow \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^s$ ja jos $0 < r \le p < s = \infty$, niin $\mu(A^c) = \int_{A^c} 1 \le \int_{A^c} |f|^r < \infty$ ja siis (koska $|f(x)|^p \le \|f\|_\infty^p$ m.k. x)

$$\int_{A^c} |f|^p \le \int_{A^c} \|f\|_\infty^p = \|f\|_\infty^p \, \mu(A^c) < \infty.$$

Tehtävä 5.5 ([3.7] *keskitasoa, lyhyehkö, tärkeähkö*):
Olkoon μ X:n positiivinen mitta. Olkoon $\{f_n\}$ jono mitallisia funktioita $X \to \mathbb{C}$. Sanomme, että jono $\{f_n\}$ suppenee kohti funktiota f *mitassa* (μ) (tai *(μ-)mitallisesti*), jos $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.e.

$$n \ge N \implies \mu\left(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\right) < \epsilon.$$

Olkoon $\mu(X) < \infty$. Todista:
a) Jos $f_n \to f$ m.k., niin $f_n \to f$ mitassa.
b) Jos $f_n, f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ $\forall n$ ja $\|f_n - f\|_p \to 0$, niin $f_n \to f$ mitassa ($1 \le p < \infty$).

Vastaus: (a) $Y := \{x \in X \mid f_n(x) \to f(x)\}$, jolloin $\mu(X \setminus Y) = 0$. Olkoon $\epsilon > 0$. Merkitään $A_n := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$, $B_n := X \setminus \cup_{k=n}^\infty A_k$. Selvästi $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$.
Osoitetaan, että $Y \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$: Kun $x \in Y$, niin $\exists n$ s.e. $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall k \ge n$, jolloin $x \in B_n$.
Siis $\lim_n \mu(B_n) = \mu(Y) = \mu(X)$ [R2:1.19d], joten $\mu(A_n) \le \mu(\cup_{k=n}^\infty A_k) = \mu(X) - \mu(B_n) \to 0$, mistä seuraa väite (siis $\exists N\ \forall n \ge N\ (\mu(A_n) < \epsilon)$).
(b) Olkoon $\epsilon > 0$. Merkitään A_n kuten a-kohdassa. Koska $f_n \underset{L^p}{\to} f$, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ s.e. $n \ge N \implies \int_X |f_n - f|^p < \epsilon^{p+1}$. Nyt

$$n \ge N \implies \mu(A_n) = \int_{A_n} 1 = \epsilon^{-p} \int_{A_n} \epsilon^p \le \epsilon^{-p} \int_{A_n} |f_n - f|^p \le \epsilon^{-p} \int_X |f_n - f|^p < \epsilon, \text{QED.}$$

Tehtävä 5.6 ([Luku2] *vaikeahko, keskipitkä*):
[R2:Exe2.24] Askelfunktio (?) (*step function*) on määritelmän perusteella $\mathbb{R}$:n rajoitettujen välien karakterististen funktioiden lineaarikombinaatio. Osoita, että jos $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, niin on olemassa askelfunktioiden g_n jono s.e. $g_n \underset{L^1}{\to} f$ (ts. $\int_{-\infty}^\infty |f - g_n| \to 0$). (Vihje: Tapa1: [R2:3.13] ja m:n säännöllisyys [R2:2.20b] sekä tehtävä 1.2e. Tapa2: Lusinin lause [R2:2.24], tehtävä 3.5, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$-funktioiden tasainen jatkuvuus.)

Vastaus: Ratkaisun alustus: Olkoon $E \in \mathfrak{M}_\mathbb{R}$, $m(E) < \infty$ ja $\eta > 0$. Tällöin on olemassa avoin joukko $V \subset_\circ \mathbb{R}$ s.e. $E \subset V$ ja $m(V \setminus E) < \eta/2$ (koska m on säännöllinen [R2:2.20b]). Kuten tehtävässä 1.2e todettiin, on olemassa avoimet välit I_n $(n \in \mathbb{N})$ s.e. $V = \uplus_n I_n$ (ja I_n ovat rajoitettuja, koska muutoin olisi $m(V) = \infty$). Tällöin $\infty > m(V) = \sum_n I_n$, joten voidaan valita N s.e. $\sum_{n=N+1}^\infty I_n < \eta/2$. Nyt

$$\|\chi_E - \sum_{n=1}^N \chi_{I_n}\|_1 \le \|\chi_E - \chi_V\|_1 + \|\chi_V - \sum_{n=1}^N \chi_{I_n}\|_1$$

$$= \int_\mathbb{R} \chi_{V\setminus E} + \int_\mathbb{R} \chi_{V \setminus \cup_{n=1}^N I_n} = \mu(V \setminus E) + \mu(V \setminus \cup_{n=1}^N \chi_{I_n}) < \eta/2 + \eta/2 = \eta.$$

Ratkaisu: Valitaan porrasfunktiojono $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.e. $S \ni s_n \underset{L^1}{\to} f$ [R2:3.13]. Jos nyt jokaisella $n \in \mathbb{N}$ valitsemme askelfunktion g_n s.e. $\|g_n - s_n\|_1 < 1/n$, niin

$$\|f - g_n\|_1 < \|f - s_n\| + 1/n \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

kuten haluttiin. Jos $s_n = 0$, valitaan $g_n = 0$; jos $s_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i}\chi_{E_{n,i}}$, niin merkitään $M := \max_{i=1,\ldots,k_n} |\alpha_{n,i}|$ ja valitaan joukolle $E_{n,i}$ ja luvulle $\eta := 1/nMk_n$ välit $I_{n,i,1}, \ldots, I_{n,i,N_{n,i}}$ kuten alustuksessa. Sitten valitaan askelfunktio g_n seuraavasti: $g_n := \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} \sum_{j=1}^{N_{n,i}} \chi_{I_{n,i,j}} = \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{N_{n,i}} \alpha_{n,i}\chi_{I_{n,i,j}}$, jolloin

$$\|s_n - g_n\|_1 \le \sum_{i=1}^{k_n} \|\alpha_{n,i}\chi_{E_{n,i}} - \alpha_{n,i} \sum_{j=1}^{N_{n,i}} \chi_{I_{n,i,j}}\|_1$$

$$\le \sum_{i=1}^{k_n} |\alpha_{n,i}| \|\chi_{E_{n,i}} - \sum_{j=1}^{N_{n,i}} \chi_{I_{n,i,j}}\|_1 < \sum_{i=1}^{k_n} M\eta = k_n M\eta = 1/n, \quad \text{kuten haluttiin.}$$