Mat-1.150 Reaalianalyysi 4. harj. ti 11.10.1994: vastaesim. (1 sivua)+

Tässä konstruoidaan [R2:2.22]:n todistusta mukaillen funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. jos $h : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ on Lebesgue-mitallinen ja $h \geq f$ m.k., niin $h = \infty$ m.k., minkä jälkeen osoitetaan helposti, että tehtävässä 4.3 [R2:2.14] ei välttämättä voida valita funktiota h (eikä g) äärelliseksi.

Kuten [R2:2.22]:ssa, poimitaan yksi alkio kustakin $\mathbb{Q}$:n sivuluokasta (kustakin $r + \mathbb{Q}$, missä $r \in \mathbb{R}$), ja merkitään E:llä näiden joukkoa. Tällöin siis $\mathbb{Q} \ni q \neq q' \in \mathbb{Q} \Rightarrow (q + E) \cap (q' + E) = \emptyset$ (*).

<u>Lemma 1:</u> *Jos* $Q \subset \mathbb{Q}$ *on äärellinen, niin* $D \subset Q + E \implies D \notin \mathfrak{M} \vee m(D) = 0$.

<u>Tod.:</u> Mitan m säännöllisyyden [R2:2.20b] perusteella riittää todistaa, että $K \subset_K D \Rightarrow m(K) = 0$. Konstruoidaan jono $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seuraavasti: $M := \max\{1, \sup\{|q| \mid q \in Q\}\}$, $I := \mathbb{Q} \cap \bar{B}_M$. Olkoon $p_1 = 0$. Kun alkiot $p_1, ..., p_n \in I$ on valittu, valitaan $p_{n+1} \in I \setminus (\{p_1, ..., p_n\} + Q - Q)$ (tällainen on olemassa, koska $\{p_1, ..., p_n\} + Q - Q$ on äärellinen). Nyt $n > k \Rightarrow (p_n + Q) \cap (p_k + Q) = \emptyset$, koska $p_n + q = p_k + q' \Rightarrow p_n = p_k + q' - q \in p_k + Q - Q \Rightarrow n = k$.

Nyt $n \neq k \Rightarrow (p_n + K) \cap (p_k + K) = \emptyset$, sillä jos $a, b \in K$ (jolloin $a = q + e$ ja $b = q' + e'$, missä $q, q' \in Q \wedge e, e' \in E$), ja $p_n + a = p_k + b$ eli $p_n + q + e = p_k + q' + e'$, niin olisi $p_n + q = p_k + q'$ [*], jolloin olisi $n = k$.

$H := \biguplus_{n\in\mathbb{N}}(p_n + K) \in \mathfrak{M}$. Koska $H \subset I + K \subset \bar{B}_M + K$ on rajoitettu, $\infty > m(H) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(p_n + K) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(K)$, joten $m(K) = 0$. ////

Numeroidaan $\mathbb{Q}$ (siis $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, ...\}$). Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\chi_{q_n+E} \geq 1$. Olkoon $h : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue-mitallinen funktio ja $h \geq f$. Osoitetaan, että $h = \infty$ m.k.:

$H_n := h^{-1}(]-n, n[) \in \mathfrak{M}\ \forall n$, $H := \cup_n H_n = \{x \mid h(x) \neq \infty\}$. Tällöin $H_n \subset F_n := f^{-1}(]-n, n[) = \cup_{k=1}^{n-1}(q_k + E) \subset \{q_1, ..., q_{n-1}\} + E$, joten lemman 1 perusteella $m(H_n) = 0\ \forall n$ ja siis $m(H) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(H_n) = 0$. Niinpä $h(x) = \infty$ m.k. x.

Jos nyt $k > 1$ ja määritellään $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ s.e. $g = \chi_{\mathbb{R}} f$, niin $g = 0$ m.k. ja siis g on Lebesgue-mitallinen, mutta jos $h : \mathbb{R}^k \to [-\infty, \infty]$ on Borel-mitallinen ja $h \geq g$, niin $h_{|\mathbb{R}} \geq f$ ja siis h saa arvon ∞ joillain x (onhan $h_{|\mathbb{R}}$ selvästi $\mathbb{R}$-Borel-mitallinen). Tapauksessa $k = 1$ väite jää avoimeksi (olisiko kellään lainata sopivia $\mathbb{R}^1$:n $\mathfrak{M} \setminus \mathcal{B}$-joukkoja?).