Mat-1.150 Reaalianalyysi 4. harj. vastauksineen ti 11.10.1994 (3 sivua)+

Huom.: tehtävän 3.6 kysymyksessä oli virheellinen kommentti, ko. väite pätee L^p:ssä, kun $0 < p < \infty$ [R2:Exe3.17b] muttei kun $p = \infty$ (htl).

Tehtävä 4.1 ([Luku 1] *keskitasoa, keskipitkä*):
Konstruoi sellainen välin $X := [0,1]$ (täydellistetty) Borel-mitta μ, että funktio $x \mapsto f(x) = x$ ei kuulu joukkoon $\mathcal{L}^1(\mu)$, mutta funktio $x \mapsto g(x) = x^2$ kuuluu ja lisäksi
(a) $E \cap \{\frac{1}{k} \,|\, k \in \mathbb{N}\} = \emptyset \Rightarrow \mu(E) = 0$,
(b) $\exists h \in \mathcal{L}$ $(h \geq 0 \wedge \mu(E) = \int_E h(x)\,dx \;\forall E \in \mathcal{B})$ [1.29], missä $\mathcal{B}$ on Borel-joukkojen perhe.
(c) Onko mahdollista toteuttaa (a) ja (b) yhtaikaa?

Vastaus: *Jos ν on numeroituvan joukon A mitta, niin mitan σ-additiivisuuden perusteella $\nu(E) = \sum_{x\in E} \nu(\{x\}) = \sum_{x\in E} a_x$ $\forall E \subset A$, missä $a_x := \nu(\{x\}) \in [0,\infty]$ $\forall x \in A$. Nyt mon. konv. tai dom. konv. perusteella (vrt. 3.4:n vastaus) $\int_A F\,d\nu = \sum_{x\in A} F(x)\nu(x) = \sum_{x\in A} F(x) a_x$ (*), kun $F \geq 0$ (mon. konv.) tai $\sum_{x\in A} |F(x)| a_x < \infty$ (dom. konv.).*

(a) $A := \{\frac{1}{k} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. Koska $\mu|_{\mathcal{P}(A)}$ on $(A, \mathcal{P}(A))$:n mitta (htl), $\mu|_{\mathcal{P}(A)}$ on siis em. muotoa. Nyt $\mu(A^c) = 0$, joten $\int_X F\,d\mu = \int_A F\,d\mu = \sum_{x\in A} F(x)\mu(\{x\})$ $\forall F$ (*). Jos nyt valitaan $\mu(\{x\}) = 1$ $\forall x \in A$, niin $\int_X f\,d\mu \overset{*}{=} \sum_{x\in A} f(x)\mu(\{x\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(\frac{1}{k}) \cdot 1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} = \infty$ ja $\int_X g\,d\mu \overset{*}{=} \sum_{x\in A} g(x)\mu(\{x\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\frac{1}{k})^2 < \infty$.

(b) $\int_X F\,d\mu = \int_X F h\,dm$ $\forall F \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M}); [0,\infty])$ [R2:1.29]. Jos nyt valitaan $h(x) = x^{-2}\chi_{]0,1]} \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M}); [0,\infty[)$ (koska määritelty kahdessa jatkuvassa (siis Borel-mitallisessa) palassa). $\int_0^1 f\,d\mu \overset{1.29}{=} \int_0^1 f h\,dm = \int_0^1 x^{-1} \overset{mon.konv.}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^{-1}\chi_{[\frac{1}{n},1]} = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 x^{-1} = \lim_{n\to\infty} (\ln 1 - \ln \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$, mutta $\int_X g\,d\mu = \int_X x^2 x^{-2} = \int_X 1 = 1 < \infty$.

(c) Ei ole mahdollista: jos (a) ja (b) olisivat tosia, niin olisi $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c) = \int_A h + 0 = 0 + 0 = 0$ (koska $m(A) = 0$, koska A on numeroituva) ja siis $\int_X f\,d\mu = 0$.

Kommentteja: f ja g ovat jatkuvia ja siis Borel-mitallisia, eikä tehtävässä ole muitakaan kohtia, joissa mitan täydellistäminen vaikuttaisi tuloksiin. (Jos $\nu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ on mitta ja $\nu^* : \mathfrak{M}^* \to [0,\infty]$ on sen täydellistymä, niin triviaalisti $\mathfrak{M}$-mitalliset joukot ja funktiot ovat $\mathfrak{M}^*$-mitallisia. Jos $f \geq 0$ ja $s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k}$ on $\mathfrak{M}^*$-mitallinen porrasfunktio sekä $0 \leq s \leq f$, niin $s' := \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k} \geq 0$ on $\mathfrak{M}$ mitallinen porrasfunktio ja $0 \leq s' \leq s \leq f$ ja $\int s = \int s'$, kunhan joukot A_k valitaan kuten lauseessa [R2:1.36]. Niinpä (jos $f \geq 0$ on $\mathfrak{M}$-mitallinen) $\int f\,d\nu^* = \int f\,d\nu$ (jos $f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{M}; \mathbb{C})$, niin sama seuraa jakamalla f neljään osaansa [R2:1.31]).)

(a) (Huom.: $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{B}$ (suljettujen) yksiöiden numeroituvina yhdisteinä).
(Huom.: koska $\mu(A^c) = 0$, kaikki A^c:n osajoukot ovat mitallisia [R2:1.36], peräti $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$ $(E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \in \mathfrak{M} := \mathcal{B}^*$, missä $\mathcal{B}^*$ tarkoittaa Borel-σ-algebran täydellistymää μ:n suhteen).)

(b)-kohdassa tehty mon. konv. -temppuhan vastaa $[0,\infty]$-funktion epäoleellista Riemann-integraalia; jos integrandi saavuttaa negatiivisiakin arvoja, niin mon. konv. ei aina päde [R2:1.26].) (Huom.: Jos $h \equiv 1$, niin $\mu = m$ (ja $\mathfrak{M}$ on Lebesgue-mitallisten $[0,1]$:n osajoukkojen perhe); jos $h \equiv 0$, niin $\mu \equiv 0$ ja $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$.) (Huom.: merkinnällä $\int_0^1 d\mu$ tarkoitetaan jotain integraaleista $\int_{[0,1]}, \int_{[0,1[}, \int_{]0,1]}, \int_{]0,1[}$, joten sitä ei pidä käyttää, ellei $\mu(\{0\}) = 0 = \mu(\{1\})$ (jolloin kaikki neljä integraalia yhtyvät).)

Tehtävä 4.2 ([Luku 2] *helpohko, lyhyehkö*):
[R2:Exe2.1] Olkoon $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (i) Osoita, että seuraavista väittämistä kolme on tosia ja yksi epätosi:
(a) Jos f_1 ja f_2 ovat ylhäältä puolijatkuvia, niin on myös $f_1 + f_2$.
(b) Jos f_1 ja f_2 ovat alhaalta puolijatkuvia, niin on myös $f_1 + f_2$.
(c) Jos jokainen f_n on ylhäältä puolijatkuva, niin on myös $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.
(d) Jos jokainen f_n on alhaalta puolijatkuva, niin on myös $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.
(ii) Mitä tapahtuu, jos $[0,\infty[$ korvataan $]-\infty,\infty[$:llä? (iii) Entä jos $\mathbb{R}$ korvataan mielivaltaisella topologisella avaruudella X?

Vastaus: (Huom.: vastaukset olisivat samoja, vaikka $[0,\infty[$ korvattaisiin $[0,\infty]$:llä ($]-\infty,\infty[$-funktioiden yhteenlasku ei sen sijaan ole aina määritelty (lähinnä $\infty - \infty$)). Tämän todistaminen vaatisi vain pieniä merkinnällisiä muutoksia ao. päätelmiin.)

(a) on aina tosi (i, ii ja iii): Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ annettu, $V := \{x \,|\, f_1(x) + f_2(x) < \alpha\}$. Jos $a \in V$, niin $\alpha_a := (f_1 + f_2)(a) := f_1(a) + f_2(a) < \alpha$. Olkoon $\epsilon := (\alpha - \alpha_a)/2$.

$(f_1+f_2)(x) < \alpha$, kun $x \in V_a := \{x \mid f_1(x) < f_1(a)+\epsilon\} \cap \{x \mid f_2(x) < f_2(a)+\epsilon\} \subset\!\!\circ\, V$, joten V on avoin ($V = \cup_{a\in V} V_a$).

(b) on aina tosi (i, ii ja iii), mikä nähdään kuten (a)-kohdassa.

(c) epätosi jopa tapauksessa (i): $f_n := \chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$ [2.8b], jolloin $\{x \mid \sum_n f_n < 1\} =]0,1]^c \notin \mathcal{T}$.

(d) (i) & (iii): tosi. $g_n := \sum_{n=1}^N f_n$ on alhaalta puolijatkuva $\forall N$ (b)-kohdan ja induktion perusteella. $\sum_{n=1}^\infty f_n := lim_{n\to\infty} g_n \overset{*}{=} \sup_n g_n$ on alhaalta puolijatkuva [R2:2.8c], kun $f_n \ge 0\ \forall n$ ($*$ seuraa siitä, että tällöin $g_n \le g_{n+1}\ \forall n$). Tapauksessa (ii) väite (d) on epätosi, vastaesim.: $f_n := -\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$. (Huom.: kun $\infty > \beta > 0$, niin f on y.pj. joss βf on y.pj. joss $-\beta f$ on a.pj. (koska $\{x \mid -\beta f(x) > \alpha\} = \{x \mid f(x) < -\alpha/\beta\}$).)

Tehtävä 4.3 ([Luku 2] *keskitasoa, keskipitkä, kysymys tärkeä*):
[R2:Exe2.14] Olkoon $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mitallinen ($f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k;\mathbb{R})$). Todista, että on olemassa $\mathbb{R}^k \to [-\infty,\infty]$-Borel-funktiot g ja h s.e. $g = h$ m.k. ja $g(x) \le f(x) \le h(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^k$. (Huom.: Lebesguen mitta m on erään Borel-mitan (mitan $m|_{\mathcal{B}}$) täydellistymä.)

Vastaus: Todistetaan yleisempi tulos:
Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ μ^*-mitallinen [R2:1.36] (eli $f \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M}^*);\mathbb{R})$). On olemassa $g, h \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M});[-\infty,\infty])$ s.e. $g(x) \le f(x) \le h(x)\ \forall x \wedge g(x) = h(x)$ m.k.$[\mu]$.

Todistus: 1° $f \ge 0$: Lauseen [R2:2.25] todistuksen alussa osoitetaan:
Jos $f : X \to [0,\infty]$ on mitallinen, niin on olemassa mitalliset joukot E_i (ei välttämättä erillisiä) ja luvut $c_i \in [0,\infty[$ s.e. $f(x) = \sum_{i=1}^\infty c_i \chi_{E_i}(x)\ \forall x$.

Valitaan jokaisella i joukot $A_i, B_i \in \mathfrak{M}$ s.e. $\mu(B_i \setminus A_i) = 0 \wedge A_i \subset E_i \subset B_i$ [R2:1.36]. $g := \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \chi_{A_i} \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M});[0,\infty[)$, $h := \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i\chi_{B_i} \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M});[0,\infty])$, jolloin $0 \le g \le f \le h \le \infty$. $N := \cup_i (B_i \setminus A_i)$ on $\mathfrak{M}$-nollajoukko ja $x \in N^c \Rightarrow g(x) = f(x) = h(x)$, joten g ja h ovat halutun kaltaisia. (Huom.: $h = \infty$ enintään jossain N:n ($\mathfrak{M}$-mitallisessa) osajoukossa.) (Huom.: pitkähkö vastaesimerkki tuntuu osoittavan, että h:n arvoa ∞ ei voi kieltää, ellei sallita $h < f$ nollajoukossa N tms.).

2° Jos $f \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M}^*);\mathbb{R})$, niin valitaan 1°:n avulla $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathcal{L}((X,\mathfrak{M}),[0,\infty])$ s.e. $g_1 \le f^+ \le h_1 \wedge g_1 = h_1$ m.k. $\wedge g_2 \le f^- \le h_2 \wedge g_2 = h_2$ m.k., jolloin $g_1 - h_2 \le f^+ - f^- \le h_1 - g_2\ \forall x$ ja $g_1 - h_2 = f^+ - f^- = g_2 - h_1$ m.k. x. ////

Kommentteja: h saavuttaa arvon ∞ (ja g arvon $-\infty$) enintään nollamitallisessa joukossa (jokin N:n Borel-mitallinen osajoukko). Tuloksessa $\mathbb{R}$ voidaan korvata $[0,\infty]$:llä [1°] ($[-\infty,\infty]$-arvoinen f toisi taas $\infty - \infty$-ongelman). Jos f on $\mathbb{C}$-arvoinen, voidaan $\Re f$ ja $\Im f$ käsitellä erikseen ja saada $g \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^k,\mathfrak{M});\mathbb{C})$ s.e. $g = f$ m.k. (ja $|g(x)| \le |f(x)|\ \forall x$, jos $(\Re f)^+$, ... käsitellään erikseen).

Tehtävä 4.4 ([Luku 1] *keskitasoa, lyhyehkö*):
[R2:Exe2.15] Laske $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,dx$ ja $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$ (vastaukset on helppo arvata, todistus vie jonkin aikaa).

Vastaus: Lemma $(1-\frac{x}{n})^n < e^{-x}$, kun $0 < x < n$.
Tod.: $(1-\frac{x}{n})^n = [(1-\frac{1}{n/x})^{n/x}]^x < e^{-x} = (\frac{1}{e})^x \iff (1-\frac{1}{n/x})^{n/x} < \frac{1}{e}$, joten riittää näyttää, että kun $a > 1$, niin $(1-\frac{1}{a})^a < \frac{1}{e}$ eli $\ln(\frac{a}{a-1}) > \frac{1}{a}$, mikä seuraa siitä, että $\ln(\frac{a}{a-1}) = \int_{a-1}^a \frac{dt}{t} > \int_{a-1}^a \frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}$. ////

$f_n(x) := (1-\frac{x}{n})^n e^{x/2}\chi_{]0,n[}(x)$, $f(x) := e^{-x/2}\chi_{]0,\infty[}$. $\lim_n f_n(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Lisäksi $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja lemman perusteella $0 \le f_n \le f$. Niinpä

$$\lim_n \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{x/2}\,dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \overset{dom.konv.}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

$$= -2\Big|_0^\infty e^{-x/2} = 2.$$

(b) $(1+\frac{x}{n})^n \le e^x\ \forall x \ge 0$, joten dominoidun konvergenssin perusteella

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\chi_{]0,n[}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x}\chi_{]0,\infty[} = 1.$$

Tehtävä 4.5 ([2.20] *keskitasoa, (lyhyehkö)*):
[R2:Exe2.23] Olkoon $V \subset\!\!\circ\, \mathbb{R}^k$ ja olkoon μ äärellinen (so. $\mu(\mathbb{R}^k) < \infty$) positiivinen $\mathbb{R}^k$:n Borel-mitta. Onko $f : x \mapsto \mu(x+V)$ *välttämättä* (a) jatkuva (b) alhaalta puolijatkuva (c) ylhäältä puolijatkuva? (Vihje: Tapa 1: $x_n \to x \Rightarrow \liminf_n \chi_{x_n+V} \ge \chi_{x+V}$. Tapa 2: $\mu(x+V) = \sup_{K \subset^K V} \mu(x+K)$ [R2:2.18].)

Vastaus: *(Huom.: Kun X on vektoriavaruus ja $E \subset X \ni x$, niin $x + E := \{y \in X \,\big|\, \exists e \in E\ (y = x + e)\}$. Niinpä $y \in x + E \iff y - x \in E$ (htll).)*
(c) & (a) f ei ole välttämättä y.pj. (eikä siis jva): Olkoon $V := B_1 := \{z \in \mathbb{R}^k \,\big|\, |z| < 1\}$ ja olkoon $\mu(E) = \chi_{0 \in E}\ \forall E$ (siis μ on δ-mitta eli nollaan keskittynyt yksikkömassa). Tällöin selvästi $\{x \,|\, \mu(x+V) < 1\} = \{x \,|\, 0 \notin x + V\} = \{x \,|\, 0 - x \notin V\} = \{x \,|\, -x \notin V = B_1\} = \{x \,|\, |-x| \geq 1\} = B_1^c$ ei ole avoin, joten $f := \mu(x + V)$ ei ole y.pj.

(b) Välttämättä a.pj.: Jos $y \in x + V$ eli $y - x \in V \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^k$ ja $\mathbb{R}^k \ni x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$, niin $y - x_n \overset{n\to\infty}{\to} y - x$, joten jostain N alkaen $y - x_n \in V$ eli $y \in x_n + V$ eli $\chi_{x_n+V}(y) = 1 = \chi_{x+V}(y)$. Siis $\lim_n \chi_{x_n+V}(y) = 1\ \forall y \in x + V$, joten $\liminf_n \chi_{x_n+V} \geq \chi_{x+V}$ ja siis

$$f(x) := \mu(x+V) = \int_{\mathbb{R}^k} \chi_{x+V}\, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^k} \liminf_n \chi_{x_n+V}\, d\mu$$

$$\overset{Fatou}{\leq} \liminf_n \int_{\mathbb{R}^k} \chi_{x_n+V}\, d\mu = \liminf_n f(x_n).$$

Jos nyt $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $x \in \{z \in \mathbb{R}^k \,\big|\, f(z) > \alpha\} =: A_\alpha$ ja $x_n \to x$, niin $\exists N$ s.e. $f(x_n) > \alpha\ \forall n \geq N$ eli $f(x_n) \in A_\alpha\ \forall n \geq N$, mistä seuraa, että $x \in A_\alpha^o$ (muutoinhan jokaisella $n \in \mathbb{N}$ voitaisiin poimia $x_n \in B_{1/n}(x) \cap A_\alpha^c$, jolloin olisi $x_n \to x$, mutta $\liminf_n x_n \leq \alpha$, mikä on ristiriidassa em. kanssa). (Huom.: tämä todistus on pätevä myös äärettömillä μ ja korvattaessa $\mathbb{R}^k$ millä tahansa metrisellä avaruudella.)

Tapa 2: (vain ohjeita) Toinen tapa tehdä tämä tehtävä olisi käyttää sitä tietoa, että $\mu(x + V) > \alpha \Rightarrow \exists K \overset{K}{\subset} V\ (\mu(x + K) > \alpha)$ [R2:2.18] (mm. siksi, että $\tau_x : y \mapsto x + y$ ja sen käänteiskuvaus τ_{-x} ovat jatkuvia bijektioita (ja siis topologiaisomorfismeja eli homeomorfismeja), joten $x + K \overset{K}{\subset} x + V \overset{\circ}{\subset} X$), ja tärkeää havaintoa, että $d(K, V^c) > 0$ (missä tahansa metrisessä avaruudessa X, kun $K \overset{K}{\subset} V \overset{\circ}{\subset} X$, minkä todistus pohjautuu sille, että $f[K]$ on kompakti, kun K on kompakti ja f jatkuva, ja sille, että $X \ni x \mapsto d(x, A)$ on jatkuva, kun X on metrinen ja $\emptyset \neq A \subset X \ni x$).)

Tehtävä 4.6 ([2.20] *helpohko, lyhyehkö*):
[R2:Exe2.7] Olkoon $0 < \epsilon < 1$. Konstruoi *avoin* $V \subset [0, 1]$ s.e. V on tiheä $[0, 1]$:ssä ja $m(V) = \epsilon$. (Vihje: Tapa 1: Poista välin keskeltä sopiva avoin väli, poista sitten jäljellä olevien suljettujen välien keskeltä sopivat avoimet välit jne. Tapa 2: Peitä ensin rationaaliluvut avoimin välein. Päällekkäisyyksien vuoksi peite voi olla $< \epsilon$, joten liitä mukaan vielä (uusista päällekkäisyyksistä huolimatta) riittävän pitkä avoin väli.)

Vastaus: Tapa 1: Toimitaan ohjeen mukaan. Vaiheessa $n \in \mathbb{N}$ poistetaan 2^{n-1} väliä, joiden yhteismitta on $2^{-n}\epsilon$ (kunkin mitta $2^{1-2n}\epsilon =: a_n$) (merkitään näiden yhdistettä symbolilla V_n), jolloin (nähdään induktiolla) kunkin jäljelle jäävän suljetun välin mitta on $b_n := 2^{-2n}[2^n - (2^n - 1)\epsilon] > 2^{-2n} > 2^{-2n} \cdot 2^{-1}\epsilon = 2^{1-2(n+1)}\epsilon = a_{n+1}$, joten seuraavakin poisto voidaan aina suorittaa (ja poistettavat välit eivät siis leikkaa toisiaan!!!) (toinen tapa todistaa tämä olisi todeta, että jos vaiheessa n poistettava väli olisi suurempi, kuin se mistä poistetaan, niin olisi $[0, 1] \subset \cup_{k=1}^n V_n$ (koska kaikki jäljellä olevat välit ovat yhtä pitkiä) ja siis $1 \leq 2^{-1}\epsilon + 2^{-2}\epsilon + ... + 2^{-n}\epsilon < \epsilon < 1$, mikä olisi ristiriitaista).
$V := \cup_n V_n \overset{\circ}{\subset} [0, 1]$, jolloin $m(V) = m(\biguplus_n V_n) = \sum_n m(V_n) = \sum_n 2^{-n}\epsilon = \epsilon$. Jos $x \in X$ ja $\eta > 0$, niin $\eta > b_n$ jollain n (koska $b_n < 2^{-n}$) ja siis $|x - y| < b_n < \eta$ jollain $y \in V_n \subset V$, joten V on tiheä.

Tapa 2: Numeroidaan $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (merkitään $q_1, q_2, ...$). $I_n :=]q_n - 2^{-n}\epsilon, q_n + 2^{-n}\epsilon[\ \forall n$. $W := \cup_n I_n$, jolloin $m(W) \leq \epsilon$ (voi olla $< \epsilon$, koska välit I_n voivat leikata toisiaan). $f(t) := m(]\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t[\, \cup W)$. $|f(t) - f(s)| < 2|t - s|$, joten f on (peräti tasaisesti) jatkuva. $f(0) = \mu(W) \leq \epsilon < 1 = f(\frac{1}{2})$, joten jollain t on $f(t) = \epsilon$ ja siis $V :=]\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t[\, \cup W$ on halutun kaltainen joukko.