Mat-1.150 Reaalianalyysi 3. harj. vastauksineen ti 4.10.1994 (2 sivua)

Tällä kurssilla $\mathbb{N} := \mathbb{N}_1 := \{1,2,3,...\} =: \mathbb{Z}_+$ ja $\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,...\} =: \mathbb{Z}_{+0}$. $\mathcal{L}(X)$ merkitsee kaikkia X:n mitallisia kompleksiarvoisia funktioita ja $\mathcal{L}^1(X) := \{f \in \mathcal{L}(X) \mid \int |f| < \infty\}$ (edellinen on tietysti määritelty vasta kun X:ään on sovittu jokin σ-algebra, jälkimmäinen vaatii myös mitan). L^1 määritellään kohdassa [R2:1.30] kuten $\mathcal{L}$ edellä, mutta myöhemmin ko. määritelmää muutetaan tarkoittamaan ekvivalenssiluokkia; siihen ei kannata kiinnittää liiemmin huomiota ennen kirjan kolmatta lukua). (Myös merkintöjä $\mathcal{L}(\mu)$, $\mathcal{L}(X,\mu)$ jne. käytetään.) Vihjeet ovat joskus (esim. tehtävä 3.5) niin helpottavia, että ne kannattaa lukea vasta, jos ei muuten selviä tehtävästä. Helpottavimmat vihjeet kirjoitetaan pienellä tekstillä.

Tehtävä 3.1 ([1.28] *helppo, nopeahko*):
Olkoon $f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & \text{kun } 0 \le x < \frac{1}{n}; \\ n^2(\frac{2}{n} - x), & \text{kun } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{kun } x > \frac{2}{n}; \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Laske a) $\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\,dx$, b) $\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx$ (vrt. Fatou), c) $\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\,dx$ ja d) $\int_0^1 \limsup_{n\to\infty} f_n\,dx$. (Huom.: kuten aiemmin on todettu, Lebesgue-integraali Lebesgue-mitan suhteen (jota yleensä tarkoitetaan, kun mittaa ei kerrota kuten yllä) on sama kun Riemann-integraali, mikäli jälkimmäinen on olemassa.)

Vastaus: Selvästi $\int_0^1 f_n = 1$ (kolmion ala) ja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ \forall x \in [0,1]$ ($x > 0 \Rightarrow f_n(x) = 0\ \forall n > \frac{2}{x}$). Siis $\liminf_n \int_0^1 f_n = \limsup_n \int_0^1 f_n = \lim_n \int_0^1 f_n = \lim_n 1 = 1$ ($[-\infty,\infty]$-arvoisilla jonoilla $\liminf$ ja $\limsup$ ovat aina olemassa ja selvästi aina $\exists \lim \iff \liminf = \limsup$) ja $\int_0^1 \liminf_n f_n = \int_0^1 \limsup_n f_n = \int_0^1 0 = 0$.

Tehtävä 3.2 ([1.34] *keskipitkä, keskitasoa*):
Olkoon μ X:n positiivinen mitta, $f : X \to [0,1]$ mitallinen s.e. $\int_X f\,d\mu = c$, $0 < c < \infty$ ja $\alpha > 0$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{kun } 0 < \alpha < 1; \\ c, & \text{kun } \alpha = 1; \\ 0, & \text{kun } \alpha > 1. \end{cases}$$

(Huom.: tässä, kuten yleensä mm. englanninkielisessä kirjallisuudessa log tarkoittaa samaa kuin ln, ellei toisin anneta ymmärtää.) (Vihje: $\alpha \ge 1$: integrandi$\le f \in \mathcal{L}^1$; $\alpha < 1$: Fatoun lemma!)

Vastaus: Olkoon $g_n := n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) = \log\left(\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right)^n\right)$.

1° $\alpha = 1$: $h_n(x) := (1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$ monotonisesti kasvaen $\forall x \ge 0$. (Tod.: Tunnetusti $h_n(x) \to e^x$. Selvästi $h_n(x) = 1 + x \le 1 + x + x^2/4 = h_2(x)$. Induktiolla ($n > 1$) saadaan $h_{n+1}(x) = h_{n+1}(0) + \int_0^x h'_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x (1 + \frac{x}{n+1})^n \ge 1 + \int_0^x h_n(x) \overset{induktio-oletus}{\ge} 1 + \int_0^x h_{n-1}(x) = h_n(x)\ \forall x \ge 0$, joten h_n kasvaa monotonisesti $\forall x \ge 0$.) Niinpä $g_n = \log\left((1 + \frac{f}{n})^n\right) \le \log e^f = f \in \mathcal{L}^1$ ja $g_n(x) \to f(x)\ \forall x$, joten $\int_X g_n \to \int_X f = c$ (dom. konv. ja mon. konv. kumpikin kertovat tämän).

2° $\alpha > 1$: $0 \le (\frac{f}{n})^\alpha \le \frac{f}{n}$ (koska $|f| \le 1$), joten $0 \le g_n \le f \in L^1(\mu)$. Lisäksi $g_n = \log\left((1 + \frac{1}{n}\frac{f^\alpha}{n^{\alpha-1}})^n\right) \le \log(\exp(\frac{f^\alpha}{n^{\alpha-1}})) \overset{n\to\infty}{\to} \log\exp 0 = 0$. Niinpä (dom. konv. ($g_n \le f \in L^1$)) $\lim_n \int g_n = \int 0 = 0$.

3° $0 < \alpha < 1$: Koska $\int f > 0$, niin $0 < \mu(\{x \mid f(x) > 0\}) =: A$. Jos $x \in A$, niin $g_n(x) \ge \log\left((1 + (\frac{f(x)}{n})^\alpha)^n\right) = \log\left((1 + \frac{1}{n}(f(x)^\alpha n^{1-\alpha})^n\right) \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, sillä kun $0 < M < \infty$ ja $N \in \mathbb{N}$ on s.e. $M' := f(x)^\alpha N^{1-\alpha} > M$, niin $(1 + \frac{1}{n}(f(x)^\alpha n^{1-\alpha}))^n > (1 + \frac{1}{n}M')^n > e^M$, kun $n > N$ on riittävän suuri (koska $(1 + \frac{1}{n}M')^n \to e^{M'} > e^M$). Niinpä $\infty = \int_A \infty = \int_A \liminf g_n \overset{Fatou}{\le} \liminf \int_A g_n \le \liminf \int_X g_n$, joten $\lim_n \int_X g_n = \infty$.

Tehtävä 3.3 ([1.30] *helppo, nopea*):
Olkoon $\mathcal{L}(\mu)$ (mittaan μ liittyvän sigma-algebran suhteen) mitallisten kompleksiarvoisten funktioiden joukko (myös merkintöjä $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(X,\mu)$ yms. käytetään). Olkoon $\mathcal{L}^1(\mu) := \{f \in \mathcal{L} \mid \int |f|\,d\mu < \infty\}$ (merkinnällä L^1 tarkoitetaan yleensä $\mathcal{L}^1$:n alkioiden ekvivalenssiluokkien avaruutta; eroa selvennetään [R2]:n kolmannessa luvussa, joten vielä ei kannata huolestua asiasta). Osoita, että $\mathcal{L}^1(\mu)$ on kompleksinen vektoriavaruus. (Myös L ja L^1 ovat, mutta siitä myöhemmin.)

Vastaus: $\mathcal{L}$ on kompleksikertoiminen vektoriavaruus, koska $f, g \in \mathcal{L} \wedge \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha f + g \in \mathcal{L}$ [R2:1.9c] ja vektoriavaruuden laskusääntöjen (aksioomien) pätevyys

nähdään helposti todeksi (seuraa $\mathbb{C}$:n vastaavista).
$0 \in \mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}$, joten riittää todistaa, että $\mathcal{L}^1$ on $\mathcal{L}$:n aliavaruus. $f, g \in \mathcal{L}^1 \wedge \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \int |\alpha f| = |\alpha| \int |f| < \infty \wedge \int |f+g| \leq \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g| < \infty$, joten $\mathcal{L}^1$ on todella $\mathcal{L}$:n aliavaruus (tapa 2: [R2:1.32]).

Tehtävä 3.4 ([1.33] *helpohko, nopeahko*):
Olkoon $W = \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|/n^2 < \infty\} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{C}\ \forall n \wedge \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|/n^2 < \infty\}$ (huom.: $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tarkoittaa, että a on funktio $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ja tällöin on tapana merkitä $a_n := a(n)$). (a) Määrittele joukkoon $X := \mathbb{N}$ mitta μ s.e. $W = L^1(X, \mu)$ (myös merkintöjä $L^1(X, \mu; \mathbb{C})$, $L^1((X, \mu), \mathbb{C})$ ja $L^1(X; \mathbb{C}; \mu)$ käytetään samasta asiasta). (b) Laske myös $|\int_X a\, d\mu|$ ja $\int_X |a|\, d\mu$, missä a on mielivaltainen W:n alkio.

Vastaus: (a) $\mu(\{n\}) := n^{-2}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(E) := \sum_{n\in E} \mu(\{n\})$ (selvästi numeroituvasti additiivinen ja ≥ 0, siis mitta) on haluttu mitta, koska jokaisella $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ pätee tällöin $a \in L^1(\mu) \iff \infty > \int_{\mathbb{N}} |a|\, d\mu \overset{*}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} |a(n)| \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|/n^2 \iff a \in W$ kuten haluttiin. $*$ selittyy sillä, että porrasfunktion $s_N := \sum_{n=1}^N |a(n)| \chi_{\{n\}}$ integraali on (määritelmän perusteella) $\sum_n |a(n)| \mu(\{n\})$ ja $s_N(n) \overset{N\to\infty}{\nearrow} |a(n)|\ \forall n \in X$, joten (mon. konv.) $\int |a| = \lim_N \int s_N = \lim_N \sum_{n=1}^N |a(n)| \chi_{\{n\}} =: \sum_{n=1}^\infty |a(n)| \chi_{\{n\}}$.
(b) Vastaavasti (dom. konv.) nähdään, että jos $a \in L^1(\mu) = W$, niin $\int a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n) \mu(\{n\})$ (jos $t_N := \sum_{n=1}^N a(n) \chi_{\{n\}}$, niin $t_N(n) \to a(n)\ \forall n \in X$ ja $|t_N| \leq |a| \in L^1$). Niinpä $|\int_X a\, d\mu| = |\sum_{n\in\mathbb{N}} a(n) \mu(\{n\})| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a(n)| \mu(\{n\}) = \int_X |a|\, d\mu$.

Tehtävä 3.5 ([1.30] *helpohko, nopea, tärkeä*):
Olkoon $f \in L^1(\mu)$. Osoita, että $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \in \mathfrak{M}\ (\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f|\, d\mu < \epsilon)$ (sanotaan, että $\int |f|\, d\mu$ on absoluuttisesti jatkuva μ:n suhteen (vrt. [1.29])). Vihje: käytä vaikkapa integraalin määritelmää.

Vastaus: Valitaan porrasfunktio $s \geq 0$ s.e. $s \leq |f| \wedge \int |f| - \int s < \epsilon/2$. Olkoon $a := \max s < \infty$. Jos $a = 0$, niin $\int |f| < \epsilon/2$ ja siis $\delta = 1$ kelpaa, muutoin: $\delta := \epsilon/2a$. Jos nyt $\mu(E) < \delta$, niin $\int_E |f| = \int_E (|f| - s) + \int_E s \leq \int_X (|f| - s) + \int_E s \leq \epsilon/2 + \mu(E) a < \epsilon$.

Tehtävä 3.6 ([1.35] *keskipitkä, keskitasoa*):
Olkoon $f \in \mathcal{L}^1$ ja olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ([R2]:ssa merkitään yleensä $\{f_n\}$) jono mitallisia funktioita X:llä s.e. $f_n \to f$ m.k. ja $\int_X |f_n|\, d\mu \to \int_X |f|\, d\mu$, kun $n \to \infty$. Osoita, että $\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0$, kun $n \to \infty$. (Huom.: Tämä on L^1:lle tyypillinen ominaisuus, jota ei ole L^p:ssä ($\int |\cdot| \mapsto \int |\cdot|^p$), kun $p > 1$.) (Vihje: muunna dom. konv. lauseen todistusta sopivasti.)

Vastaus: Aloitetaan parilla havainnolla: Jos $\lim_n a_n = a$, niin selvästi $\liminf_n (a_n + b_n) = a + \liminf b_n$ (**). Koska $\int |f_n| \to \int |f| < \infty$, on oltava $f_n \in \mathcal{L}^1$ ainakin jostain n lähtien, tutkitaan vain näitä n. Olkoon N sellainen nollajoukko, että $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in N^c$. $\forall g \in \mathcal{L}^1$ ($\int_X g = \int_{N^c} g + \int_N g = \int_{N^c} g$). Seuraavassa $\int$ tarkoittaa $\int_{N^c}\ \ d\mu$.

$$2\int |f| = \int (|f| + |f| - 0) = \int \left(\lim_n |f_n| + |f| - \lim_n |f_n - f|\right)$$

$$= \int \lim_n (|f_n| + |f| - |f_n - f|) \overset{Fatou}{\leq} \liminf_n \int (|f_n| + |f| - |f_n - f|)$$

$$= \liminf_n [\int |f_n| + \int |f| - \int |f_n - f|] = \int |f| + \liminf_n [\int |f_n| - \int |f_n - f|]$$

$$\overset{**}{=} \int |f| + \lim \int |f_n| + \liminf[-\int |f_n - f|] = 2\int |f| + \liminf[-\int |f_n - f|],$$

joten $0 \leq \liminf I_n$, missä $I_n := -\int_{N^c} |f_n - f| = -\int_X |f_n - f| \leq 0$ ja siis $\limsup I_n \leq 0$, joten $\liminf I_n = 0 = \limsup I_n$ eli $\exists \lim I_n = 0$ eli $\exists \lim \int_X |f_n - f| = \lim -I_n = -0 = 0$, QED.