Mat-1.150 Reaalianalyysi 2. harj. vastauksineen ti 27.9.1994 (2 sivua)

Tehtävä 2.1 ([1.3] *helppo,keskipitkä*):
Montako eri (a) topologiaa (b) σ-algebraa voidaan määritellä joukkoon $\{0,1,2\}$?

Vastaus: **(a)** Topologiat (29 kpl) ovat 1. $\Big\{\emptyset, X\Big\}$, 2. $\Big\{\emptyset, \{a\}, X\Big\}$ (3 kpl (3 eri tapaa valita a)), 3. $\Big\{\emptyset, \{a,b\}, X\Big\}$ (3 kpl), 4. $\Big\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X\Big\}$ (6 kpl), 5. $\Big\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\Big\}$ (3 kpl), 6. $\Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\Big\}$ (3 kpl), 7. $\Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\Big\}$ (6 kpl), 8. $\Big\{\emptyset, \{c\}, \{a,b\}, X\Big\}$ (3 kpl) ja 9. $\mathcal{P}(X)$. (Huom.: mikään topologia ei kuulu useampaan eri yo. kohtaan.) Huom.: sisäkkäisten joukkojen perhe $\mathcal{T}$ on topologia joss $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ (vrt. teht. 1.3a); muut yo. perheet nähdään topologioiksi esim. käymällä kaikki vaihtoehdot läpi. Loput $2^6 - 29 = 35$ $\{\emptyset, X\}$:n sisältävää $\mathcal{P}(X)$:n osajoukkoa eivät ole topologioita, sillä
1° Jos $\mathcal{T}$:ssa on kolme kaksiota, niin $\mathcal{T}$ sisältää kaikki yksiöt (näiden leikkauksia) ja siis $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.
2° Jos $\mathcal{T}$:ssa on kaksi kaksiota (merkitään näiden yhteistä alkiota a:lla), niin $\{a\} \in \mathcal{T}$, joten $\mathcal{T}$ on muotoa 5 tai 7 riippuen siitä, onko siinä yksi vai kaksi yksiötä.
3° Jos $\mathcal{T}$:ssa on yksi kaksio, niin $\mathcal{T}$ on tyyppiä 3 tai (4 tai 8) tai 6 riippuen yksiöiden määrästä (0–2).
4° Jos $\mathcal{T}$:ssa ei ole kaksioita, $\mathcal{T}$ on tyyppiä 1 tai 2.

(b) Numeroituvan joukon X σ-algebra $\mathfrak{M}$ omistaa kaikki jäsentensä leikkaukset ja yhdisteet, ja $\{\emptyset, X\} \subset \mathfrak{M}$, joten numeroituvan joukon σ-algebra on aina topologia; vastaavasti numeroituvan joukon X (joidenkin) osajoukkojen perhe $\mathfrak{M}$ on σ-algebra joss se on topologia ja se omistaa kaikki jäsentensä komplementit. Topologioista 1–9 σ-algebroja ovat siis joukot tyyppiä 1, 8 ja 9 eli viisi eri joukkoa.
Tapa 2: $\{a\} \in \mathfrak{M} \iff \{b,c\} \in \mathfrak{M}$, joten yksiöitä ja kaksioita on yhtä monta: 0 kpl $\Rightarrow$ tyyppiä 1; 1 kpl $\Rightarrow$ tyyppiä 8; 3 kpl $\Rightarrow$ tyyppiä 9.

Tehtävä 2.2 ([1.11] *triviaali*):
Osoita, että väli $[1,2[\subset \mathbb{R}$ on Borel-joukko. (Tässä tietysti $\mathbb{R}$ ajatellaan varustetuksi tavanomaisella topologiallaan; tälläisiä selvinä pidettyjä asioita ei jatkossa aina mainita.)

Vastaus: $[1,2[=]-\infty, 2[\setminus]-\infty, 1[$.

Tehtävä 2.3 ([1.15] *vaikeahko, keskipitkä*):
Määritä $\limsup_{n\to\infty} \sin(nx)$ ja $\liminf_{n\to\infty} \sin(nx)$. Ovatko rajafunktiot a) jatkuvia b) Borel-mitallisia? Voit käyttää apunasi seuraavaa lemmaa:
Jos $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *niin* $e^{2\pi i \mathbb{N} r} \underset{d}{\subsetneq} \partial B_1$ *eli* $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}\ (|e^{2\pi i n r} - e^{2\pi i a}| < \epsilon)$.
Lemman yleisempi muoto ($r_1, \ldots, r_m$ ja 1 riippumattomia yli $\mathbb{Q}$:n sekä $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$) on Kroneckerin lause [Katznelson:3.6].

Vastaus: $f_n(x) := \sin(nx)$, $f(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ ja $g(x) := \liminf_n \sin(nx)$.
1° $x = 0$: $f_n(x) = 0\ \forall n \Rightarrow f(x) = 0$.
2° $x = \frac{k}{l} 2\pi$ ($\mathrm{syt}(k,l) = 1 \wedge k,l \neq 0$): $f(x) = \max_{q \in \{\frac{1}{l}, \frac{2}{l}, \frac{3}{l}, \ldots, \frac{l}{l}\} =: A_l} \sin(q2\pi)$, koska $f_n(x) = f_{n+l}(x)$ ja $\{\frac{1k}{l}, \frac{2k}{l}, \ldots, \frac{lk}{l}\} = A_l \pmod 1$, koska muutoin joillain n ja n' olisi $\frac{nk}{l} = \frac{n'k}{l} + m \wedge 0 \leq n' < n < l \Rightarrow \frac{(n-n')k}{l} = m$, jolloin $\mathrm{syt}(k,l) > 1$. Siis $nx = \frac{nk}{l} 2\pi$ käy jossain järjestyksessä pisteet $2\pi A_l$ läpi kerran toisensa jälkeen, (koska luvuilla $n = 0, 1, \ldots, l-1$ luku nx käy l *eri* $2\pi A_l$:n alkiota läpi $\pmod{2\pi}$ ja $f_n(x) = f_{n+l}(x)\ \forall n$).
3° $x = r2\pi$ ($r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$): Lemman perusteella on olemassa jono $n_k \overset{k\to\infty}{\to} \infty$ s.e. $e^{n_k 2\pi i r} \to i$ eli $\sin(n_k r 2\pi) = \Im e^{n_k 2\pi i r} \to 1$. Niinpä $f(x) = 1$.
Vastaavasti nähdään, että
$$g(x) = \begin{cases} \min_{q \in \{\frac{1}{l}, \frac{2}{l}, \frac{3}{l}, \ldots, \frac{l}{l}\}} \sin(q2\pi), & \text{kun } x = \frac{k}{l} 2\pi \text{ ja } \mathrm{syt}(k,l) = 1 \wedge k,l \neq 0; \\ 0, & \text{kun } x = 0; \\ -1, & \text{kun } x/2\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
(Huom.: $g = -f$, koska $\sin(q2\pi) = -\sin((1-q)2\pi)\ \forall q$.)
(a) $f(1/m) = 1 \not\to 0 = f(0)$, joten $f, g \notin \mathcal{C}$.
(b) Ovat. Tapa 1: [R2:1.14]. Tapa 2: funktiot määritelty numeroituvan monessa Borel-mitallisessa osassa, joten ne ovat mitallisia (vrt. tehtävän 1.4 mallivastaus).

Tehtävä 2.4 ([1.24] *helpohko, nopeahko*):
Olkoon $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. Määritellään $\mu(\{\frac{1}{n}\}) := \frac{1}{n^2}\ \forall n$. (a) Laajenna μ koko X:n diskreetin σ-algebran $\mathfrak{M} := \mathcal{P}(X)$ mitaksi (tämä laajennus on yksikäsitteinen, miksi?). (b) $f(x) := 5x^2\ \forall x \in X$. Miksi f on mitallinen? (c) Laske $\int_A f\, d\mu$, missä $A = X \cap [\frac{1}{5}, \infty[$.

Vastaus: (a) σ-additiivisuuden (eli numeroituvan additiivisuuden) perusteella $\mu(A) = \sum_{x\in A} \mu(\{x\})$, jos μ on $\mathfrak{M}$:n mitta. Toisaalta näin määritelty μ on selvästi

σ-additiivinen funktio $\mathfrak{M} \to [0, \infty]$, siis (positiivinen) mitta.
(b) $f^{-1}V \in \mathcal{P}(X) = \mathfrak{M}\ \forall V \subset \mathbb{R}^n$.
(c) $\int_A f\,d\mu = \int_{\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\}} 5x^2\,d\mu(x) = 5\cdot 1\cdot 1 + 5\cdot(\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{1}{2})^2 + ... = 5\sum_{n=1}^{5} n^{-4} \approx 5,4017$.

Tehtävä 2.5 ([1.24] *keskitasoa, lyhyehkö*):
Myöhemmin [R2:2.20] konstruoidaan $[0,1]$:n (ja yleisemmin $\mathbb{R}^k$:n) Lebesgue-mitta. Tässä tehtävässä riittää tietää, että se on eräs $[0,1]$:n mitta, jonka määrittelyjoukkoon (σ-algebraan) kuuluvat kaikki Borel-joukot ja jolla kunkin välin mitta on sen pituus. Olkoon $f \geq 0$ rajoitettu Borel-funktio. Luennoilla osoitettiin, että tällöin

$$(\mathcal{L}) - \int_0^1 f(x)\,dx \geq (\mathcal{R}_{\text{ala}}) - \int_0^1 f(x)\,dx$$

($\mathcal{L}$-tarkoittaa Lebesgue-integraalia, $\mathcal{R}_{\text{ala}}$ Riemannin alaintegraalia; mittaa ei ole tapana mainita, kun lukijan arvellaan muutenkin tietävän, mistä mitasta on kyse (tässä Lebesguen mitasta; Riemann-integraalihan ei liity suoraan mittateoriaan)). (Em. todistus perustuu siihen, että Riemannin ala-integraali määritellään tietynlaisten (Borel-mitallisten, vrt. teht. 2.2) f:n alle jäävien porrasfunktioiden integraalien supremumiksi, kun taas Lebesgue-integraali on kaikkien Borel-mitallisten f:n alle jäävien porrasfunktioiden integraalien supremum. Myöhemmin osoitetaan myös, että kaikki Riemann-integroituvat funktiot ovat Lebesgue-mitallisia.) Osoita, että

$$(\mathcal{R}_{\text{ala}}) - \int_0^1 f(x)\,dx \leq (\mathcal{L}) - \int_0^1 f(x)\,dx \leq (\mathcal{R}^{\text{ylä}}) - \int_0^1 f(x)\,dx.$$

(Tästähän seuraa, että $(\mathcal{L}) - \int_0^1 f(x)\,dx = (\mathcal{R}) - \int_0^1 f(x)\,dx$, mikäli f on Riemann-integroituva (ts. mikäli $\mathcal{R}_{\text{ala}} = \mathcal{R}^{\text{ylä}}$).) Vihje: Voit käyttää myöhemmin todistettavaa tulosta, jonka mukaan $\int(f+g) = \int f + \int g$, kun f ja g ovat ≥ 0 ja mitallisia (tällöinhän niiden Lebesgue-integraalit ovat olemassa [R2:1.23], tosin nämä voivat olla äärettömiä). (Pelkkä integraalimerkki tarkoittaa Lebesgue-integraalia, kuten yleensäkin analyysissa.)

Vastaus: Olkoon P välin $[0,1]$ ositus eli joukko $\{x_0, ..., x_n\}$, missä $0 = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = 1$. Olkoon $M_i := \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $m_i := \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $(i = 1, ..., n)$. $s := \sum_{i=1}^n m_i \chi_{[x_{i-1},x_i[} + m_n \chi_{\{x_n\}}$, $S := \sum_{i=1}^n M_i \chi_{[x_{i-1},x_i[} + M_n \chi_{\{x_n\}}$. s:n Riemannin integraali on $\sum_{i=1}^n m_i m([x_{i-1},x_i[)$ ja S:n Riemannin integraali on $\sum_{i=1}^n M_i m([x_{i-1},x_i[)$; ne siis ovat samat kuin ko. porrasfunktioiden Lebesguen integraalit. Kun g ja h ovat mitallisia, $g \leq h \Rightarrow \int g \leq \int h$ [R2:1.24a], joten $\int s \leq \int f \leq \int S$ $(*)$. f:n Riemannin alaintegraalilla tarkoitetaan kaikkien s supremumia ja yläintegraalilla kaikkien S infinumia, joten väite saadaan epäyhtälöparista $(*)$.

Tehtävä 2.6 ([1.24] *helpohko ja nopea, jos mielikuvitusta onnestaa*):
Konstruoi jono $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ välillä $[0,1]$ jatkuvia funktioita s.e. $0 \leq f_n \leq 1\ \forall n$ ja $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ (tavallinen Riemannin integraali (eli Lebesguen integraali [teht2.5])), mutta $f_n(x) \not\to 0\ \forall x$ (eli $f_n(x)$ ei konvergoi nollaan millään x). (Vrt. monot. konv. [R2:1.26] ja dom. konv. [R2:1.34] sekä Fatoun lemma [R2:1.28].) (P.S. Parissa ensimmäisessäsi arvauksessasi on luultavasti jotain vikaa.)

Vastaus: $g_{2^{n+1}+k}(x) := \begin{cases} 2^n(x - \frac{k-1}{2^n}), & \text{kun } x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]; \\ 2^n(\frac{k+1}{2^n} - x), & \text{kun } x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]; \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$, kun $n, k \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq k < 2^{n+1}$. Tällöin g_n:ien kuvaajat muodostavat kolmiopiikin, jonka kärki vaeltaa nollasta melkein kahteen (kun k käy nollasta $2^{n+1}-1$:een) ja aloittaa sitten uuden vaelluksen kapeampana. Jos $f_n := g_n|_{[0,1]} \in \mathcal{C}([0,1])$, niin $\int_0^1 f_{2^{n+1}+k} \leq 2^{-n} \to 0$, $\liminf_{m\to\infty} f_m(x) = 0\ \forall x$ ja $\limsup_{m\to\infty} f_m(x) \geq \frac{1}{2}\ \forall x$ (koska $|x - \frac{k}{2^n}| < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$ jollain k), joten $f_n \not\to 0\ \forall x$. (Jos haluttaisiin äärettömän sileät f_n, niin tuo kolmiopiikki voitaisiin korvata äärettömän sileällä funktiolla.)