Mat-1.150 Reaalianalyysi 10. (viimeinen) harjoitus ke 7.12.1994 klo 14 vastauksineen (4 sivua)

2. välikoe on 15.12.94 klo 16–19 salissa A (taloustieteen tenttien yhteydessä). Koealue on luvut 4–8 (vain käsitellyt osat). **Tentti** lienee ma 19.12.94 klo 9–12. Loppukurssin asiat kokeisiin:
Ch4: Ilman tod.: 4.1–4.12 ja 4.23–4.26 (4.5b tärkeä!). Todistuksineen: 4.13–4.18.
Ch5: Ilman tod.: 5.1–5.4, 5.8–5.11, 5.14–5.16, 5.19, 5.20.
Ch6: Kokonaan, paitsi kohtien 6.3, 6.11, 6.12 ja 6.19 tod. Lauseen 6.16 todistuksesta tapaus $\mu(X) < \infty$ riittää.
Ch7: Todistuksineen: 7.1–7.11 ja 7.17–7.20. Ilman tod.: kaava 7.26(15) s. 156.
Ch8: Ilman tod.: 8.8 ja 8.10–8.12. Todistuksineen: 8.1–8.7.

Huom.: Tämä on huomattavan raskas annos. Tärkeysjärjestys:
1. lauseet 2. niiden soveltaminen 3. todistusten perusideat.
Monimutkaisten todistusten yksityiskohdat kannattaa ohittaa. On hyödyllisempää kiteyttää jokaisen todistuksen perusidea yhteen tai kahteen lyhyeeseen lauseeseen.

Kokeissa sovellettaessa jotakin [R2]:n lausetta olisi hyvä kirjoittaa tyyliin "Koska f on mitallinen (koska jatkuva) ja $f \geq 0$, kirjan lauseen mukaan integrointijärjestyksen saa vaihtaa"tai edes yhtäsuuruusmerkin yläpuolelle voisi merkitä "$f \geq 0$ mit. (<= jva)", sillä em. temput eivät kuitenkaan ole (tässä kurssissa) itsestäänselvyyksiä. Mahdollinen lauseen nimi ("Fubini") tms. on tietysti avuksi, muttei välttämätön.

Mallivastauksissa, erityisesti tämänkertaisissa, on usein varsin pikkutarkasti käyty yksityiskohtia läpi. Kokeissa ei olla näin tarkkoja.

———————————

Huom.: [R2:Ch8]:ssa mitat ovat positiivisia samoin kuin muissakin luvuissa lukua 6 lukuunottamatta, ellei toisin (kuten tehtävässä 10.6) sanota. Fubinin lause [R2:8.8] kertoo, että kaksoisintegraalissa integrointijärjestyksen saa vaihtaa, jos integrandi on *tulo*mitallinen ja ($[0,\infty]$-arvoinen tai integroituva). Määritelmän [8.1] merkintä $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ ei tarkoita ko. joukkojen karteesista tuloa, joten olisi ehkä parempi käyttää merkintää $\mathfrak{M}_{X\times Y}$.

(htll) Jos $f(x,y) = g(y)$ $\forall x, y$ ja $g \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_Y)$, niin $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_{X\times Y})$.
(htll) $(\mu \times \lambda)(A \times B) = \mu(A)\lambda(B)$ [8.7].
(htll) Jos μ, λ ovat täydellisiä ja $(\mu\times\lambda)^*(N) = 0$, niin $\lambda(N_x) = 0$ m.k. x (joillain x ehkä $N_x \notin \mathfrak{M}_Y$). (Vihje: merkitse $h := \chi_N$ [R2:8.12Lemma2].)
(htll) Keksi $N \subset X \times Y$ (ja $(X, \mathfrak{M}_X, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{M}_Y, \lambda)$) s.e. $(\mu\times\lambda)^*(N) = 0$ ja jollain x on $N_x \notin \mathfrak{M}_Y$). (Erityisesti $N \in \mathfrak{M}^*_{X\times Y} \setminus \mathfrak{M}_{X\times Y}$ [R2:8.6].)
(htl) Jos μ, λ ovat täydellisiä ja $E \in (\mathfrak{M}_{X\times Y})^*$, niin $E_x \in \mathfrak{M}_X$ m.k. x $\wedge$ $\lambda(E_x) \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_X) \wedge (\mu\times\lambda)^*(E) = \int_X \lambda(E_x)\, d\mu(x)$. ($Y$ vast.). (Vihje: $E = Q \dot\cup N$, missä $Q \dot\cup \mathfrak{M}_{X\times Y}$..., ks. myös ed. teht. ja [R2:8.12Lemma2])
(htll) Jos $f(x,y) = g(y)$ $\forall x, y$ ja $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$, niin $f \in \mathcal{C}(X \times Y, Z)$.
($X \times Y$ varustetaan tulotopologialla eli heikoimmalla topologialla, joka sisältää joukot $U \times V$, missä $U \overset{\circ}{\subset} X$ $\wedge$ $V \overset{\circ}{\subset} Y$. Tämä on sama kuin kaikkien em. joukot omistavien topologioiden leikkaus (htll). Esim. $\mathbb{R}^2$:n topologia saadaan näin $\mathbb{R}$:n topologiasta (htl).)

Tehtävä 10.1 ([8.6] *helpohko, lyhyt*):
Olkoon $\mu \in M(\mathbb{R})$ (kompleksinen Borel-mitta) ja $E \in \mathcal{B} := \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (Borel-mitallinen). Osoita, että $f : s \mapsto \mu(E - s)$ on mitallinen. (Tätä tulosta käytettiin tehtävässä 7.6.)

Vastaus: Yleisyyttä rajoittamatta oletetaan $\mu \geq 0$ (muutoin $\mu = \mu_1 - \ldots$).
$g(s,t) := s + t \Rightarrow Q := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, s + t \in E\} = g^{-1}E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ [R2:1.12b] (Borel-joukon mitallinen alkukuva on mitallinen [R2:1.12b]).

$$f(s) := \mu(E - s) := \mu(\{t \,|\, t \in E - s\}) = \mu(\{t \,|\, t + s \in E\} = \mu(\{t \,|\, t \in Q_s\}) = \mu(Q_s),$$

joten $f = \phi$ on Borel-mitallinen [R2:8.6].

Tehtävä 10.2 ([8.8] *helpohko, lyhyehkö*):
[R2:Exe8.3] Etsi $f \in \mathcal{C}(A, [0,\infty[)$ ($A :=]0,1[^2 \subset \mathbb{R}^2$) s.e. $\int_A f\, dm < \infty$, mutta $\phi(x) := \int_0^1 f_x\, dm = \infty$ [R2:8.8] jollain $x \in]0,1[$.

Vastaus: Olkoon $1 < r < 2$ ja $f(x,y) := (|x - \frac{1}{2}| + y)^{-r} \in \mathcal{C}(A,]0,\infty[) \subset \mathcal{L}(A, [0,\infty])$.
$\phi(\frac{1}{2}) := \int_0^1 f_{\frac{1}{2}}(y)\, dy = \int_0^1 y^{-r}\, dy \overset{mon.konv.}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 y^{-r}\, dy = \lim_{n\to\infty} \Big|_{1/n}^{1} \frac{y^{1-r}}{1-r} = \infty.$

$$\phi(x) := \int_0^1 f_x(y)\, dy \overset{x \neq 1/2}{=} \Big|_0^1 \frac{(|x - \frac{1}{2}| - y)^{1-r}}{1-r} = \frac{|x-\frac{1}{2}|^{1-r} - (|x - \frac{1}{2}| + 1)^{1-r}}{r-1}$$

Koska f on jatkuva, se on tulomitallinen. Lisäksi $f \geq 0$, joten Fubini [R2:8.8] on oikeutettu.

$$\int_A f(x,y) \overset{8.8}{=} \int_0^1 \phi(x)\, dx \overset{*}{=} 2\int_{1/2}^1 \phi(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{r-1}\int_{1/2}^1 [|x - \frac{1}{2}|^{1-r} - (|x - \frac{1}{2}| + 1)^{1-r}]\, dx = \frac{2}{r-1}\Big|_{1/2}^1 [\frac{(x-\frac{1}{2})^{2-r}}{2-r} - \frac{(x+\frac{1}{2})^{2-r}}{2-r}] < \infty.$$

(*) $\phi(\frac{1}{2} + t) = \phi(\frac{1}{2} - t)$ $\forall t$, joten tämä nähdään symmetrialla tai muuttujanvaihdolla [R2:7.26(15)] tai muuten vain laskemalla $\int_{]0,1/2[}$ ja $\int_{[1/2,1[}$ erikseen.

Kommentteja: (ht) Jos $X' \in \mathfrak{M}_X \wedge Y' \in \mathfrak{M}_Y$, niin $\mathfrak{M}_{X' \times Y'} = \{E \subset X' \times Y' \,|\, E \in \mathfrak{M}_{X \times Y}\}$ eli $X' \times Y'$:n σ-algebra [R2:8.1] on sama kuin $X \times Y$:ltä peritty (olettaen, että X':ssa käytetään X:ltä perittyä ja Y':ssa Y:ltä perittyä.).
(htll) Mitat vastaavasti (siis $\mu_{X' \times Y'} = \mu_{X \times Y}|_{\mathfrak{M}_{X' \times Y'}}$).
Erityisesti $A =]0,1[\times]0,1[$ saa kummalla tavalla tahansa määriteltynä (kun mitta ja σ-algebra täydellistetään, kuten $\mathbb{R}^k$:n osajoukoissa on tapana "Lebesgue-mitalle" tehdä) $\mathbb{R}^2$-σ-algebran ja $\mathbb{R}^2$-Lebesgue-mitan rajoittumat.
(ht) Topologiat vastaavasti: jos edes $X' \subset X \wedge Y' \subset Y$, niin $\mathcal{T}_{X' \times Y'}$ on sama kuin $\mathcal{T}_{X \times Y}$:ltä peritty eli $\{W \cap (X' \times Y') \,|\, W \in \mathcal{T}_{X \times Y}\}$.
(Em. asiat voivat aluksi kummastuttaa, mutta niihin tottuu pian ja sitten ne eivät enää vaivaa mieltä. Niinpä em. yksityiskohtia ei yleensä kirjoiteta näkyviin.)

Tehtävä 10.3 ([8.7] *keskitasoa, keskipitkä*):
[R2:Exe8.2] Olkoon $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, [0,\infty[)$ ja olkoon $A(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < f(x)\}$.

(a) Onko $A(f)$ $\mathbb{R}^2$-Lebesgue-mitallinen?
(b) Jos on, onko $\int_{\mathbb{R}} f\, dm = m(A(f))$?
(c) Onko f:n graafi $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ mitallinen $\mathbb{R}^2$:ssa?
(d) Jos on, onko graafin mitta nolla?

Vastaus: a) 1° $A(\alpha\chi_E) = E \times]0,\alpha[\in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ (measurable rectangle [R2:8.1]) ($\mathfrak{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$:llä tarkoitetaan tässä tulo-σ-algebraa (Rudin: $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$), jonka täydellistymä $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^2}$ on [R2:8.11]). Vastaavasti, kun $\alpha_1, ..., \alpha_n \in]0,\infty[$ ja $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ ovat erillisiä, niin $A(\sum_j \alpha_j E_j) = \uplus_j (E_j \times]0,\alpha_j[) \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$.
2° Olkoon $s_n \to f$ monot. [R2:1.17]. $A(f) = \cup_{n=1}^{\infty} A(s_n) \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ (koska $0 < y < f(x) \Rightarrow \exists n\ (0 < y < s_n(x))$).
b) 1° $m(A(\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j})) = \sum_j m(E_j \times]0,\alpha_j[) = \sum_j m(E_j)\alpha_j =: \int \sum_j \alpha_j \chi_{E_j}$.
2° $s_n \to f$ monot.

$$\int_{\mathbb{R}} f \overset{mon.konv.}{=} \lim_n \int_{\mathbb{R}} s_n = \lim_n m(A(s_n)) \overset{*}{=} m(A(f)).$$

(*): koska $A(f) = \cup_n A(s_n)$ ja $A(s_n) \subset A(s_{n+1})$ $\forall n$ [R2:1.19d].

c)
$$\Gamma(f) = \cap_{n\in\mathbb{N}} \{(x,y) \,|\, f(x) \le y < f(x) + 1/n\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} [A(f+1/n) \setminus A(f)] \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}.$$

d) Olkoon m_1 $\mathbb{R}$-Lebesgue-mitta ja m_2 $\mathbb{R}^2$-Lebesgue-mitta. $\Gamma(f)_x := \{y \,|\, (x,y) \in \Gamma(f)\} = \{f(x)\}$. $m_1(\Gamma(f)_x) = m_1(\{f(x)\}) = 0$ $\forall x$, joten

$$m_2(\Gamma(f)) \overset{R2:8.11}{=} m_1 \times m_1(\Gamma(f)) \overset{R2:8.7}{:=} \int m_1(\Gamma(f)_x)\, dm_1 = 0 \text{ [R2:8.7]}.$$

Kommentteja: a) (Huom.: Jos f on Borel-mitallinen, niin on myös $A(f)$.) Vastaavasti joukko $\{(x,y) \,|\, g(x) < y < f(x)\}$ on mitallinen, kun g ja f ovat reaaliarvoisia tai edes $[-\infty,\infty]$-arvoisia (myös $< \mapsto \le$ käy). Lisäksi $(\mathbb{R}, m) \times ([-\infty,\infty], m)$ voidaan korvata $(X,\mu) \times ([-\infty,\infty], m)$. b) Siis f:n rajaama ala $A(f)$ on sama kuin $\int f$.

Tehtävä 10.4 ([8.1] *keskitasoa, keskipitkä*):
[R2:Exe8.11] Olkoon $\mathcal{B}_k := \mathcal{B}_{\mathbb{R}^k}$ avaruuden $\mathbb{R}^k$ Borel-σ-algebra. Todista, että $\mathcal{B}_{m+n} = \mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_n$ (huom.: [R2]:ssa (siis tässäkin) $\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_n$ määritellään harhaanjohtavasti karteesisen tulon $\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_n$ virittämäksi σ-algebraksi [R2:8.1]). (Tätä sovelletaan lauseessa [R2:8.14].)

Vastaus: 1^o $\subset$: $\mathcal{B}_{m+n}$ määritellään siis pienimmäksi $\mathbb{R}^{m+n}$:n σ-algebraksi, joka sisältää $\mathcal{T}_{m+n}$:n. Niinpä riittää, kun oletuksella $V \in \mathcal{T}_{m+n}$ osoitetaan $V \in \mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_n$.
Lemman perusteella V on numeroituva yhdiste joukoista $Q_{r_q}(q) = (]q_1 - r_q, q_1 + r_q[\times \ldots \times]q_m - r_q, q_m + r_q[) \times (]q_{m+1} - r_q, q_{m+1} + r_q[\times \ldots \times]q_{m+n} - r_q, q_{m+n} + r_q[) \subset \mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_n$ (measurable rectangle).

2^o $\supset$: Selvästi pienin $\mathbb{R}^{m+n}$-σ-algebra, joka omistaa joukot $U \times \mathbb{R}^n$ ($U \subset^{\circ} \mathbb{R}^m$) on $\{E \times \mathbb{R}^n \,|\, E \in \mathcal{B}_m\}$. Vastaavasti pienin $\mathbb{R}^{m+n}$-σ-algebra, joka omistaa joukot $\mathbb{R}^m \times V$ ($V \subset^{\circ} \mathbb{R}^n$) on $\{\mathbb{R}^m \times F \,|\, F \in \mathcal{B}_n\}$. Niinpä $\mathcal{B}_{m+n}$ sisältää kaikki em. joukot (koska $U \times \mathbb{R}^n \subset^{\circ} \mathbb{R}^{m+n}$ jne.), siis myös joukon $U \times V = (U \times \mathbb{R}^n) \cap (\mathbb{R}^m \times V)$ mielivaltaisilla $U \subset^{\circ} \mathbb{R}^m$, $V \subset^{\circ} \mathbb{R}^n$. ////

Lemma *Jos $V \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^k}$, niin on olemassa sellaiset r_q, että $V = \cup_{q\in\mathbb{Q}^k \cup V} Q_{r_q}(q)$, missä $Q_r(x) := \{y \,\big|\, |y_i - x_i| < r\ (i = 1, ..., k)\}$.*

Todistus: Jokaiselle $x \in V$ on olemassa r s.e. $B_r(x) \subset V$. Tällöin myös $Q_r(x) \subset V$. Siis $\exists \sup\{s \in]0,\infty[\,\big|\, Q_s(q) \subset V\} =: r_x$. Näin $\cup_{q\in\mathbb{Q}^k \cup V} Q_{r_q}(q) \subset V$.

Olkoon sitten $x \in V$. Valitaan $q \in Q_{r_x/3}(x) \cap \mathbb{Q}^k$. Tällöin $r_q \ge 2r_x/3$, joten $x \in Q_{r_q}(q)$. ////

Tehtävä 10.5 ([8.8] *helpohko, keskipitkä*):
[R2:Exe8.12] Todista Fubinin lauseen ja kaavan $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt$ $(x > 0)$ avulla, että

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Vastaus: $(t \mapsto \frac{e^{-xt}}{-x}) \in \mathrm{AC}([0,M])$, joten (*)

$$\frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nt}-1}{-x} = \lim_{n\to\infty} \Big|_0^n \frac{e^{-xt}}{-x} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-xt} \overset{mon.konv.}{=} \int_0^\infty e^{-xt}.$$

$$I := \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^A \sin x \int_0^\infty e^{-xt}\,dt\,dx = \int_0^A \int_0^\infty \sin x\; e^{-xt}\,dt\,dx$$

$$\overset{**}{=} \int_0^\infty \int_0^A \sin x\; e^{-xt}\,dx\,dt.$$

(**) Fubini on oikeutettu, koska $(x,t) \mapsto \sin x$ ja $(x,t) \to xt$ ovat jatkuvia samoin kuin jatkuvat funktiot jatkuvista funktioista, joten integrandi on jatkuva ja siis peräti $\mathbb{R}^2$-Borel-mitallinen, sekä $]0,A[\times]0,\infty[$-integroituva:

$$\int_0^A \int_0^\infty |\sin x\; e^{-xt}|\,dt\,dx = \int_0^1 + \int_1^A \le \int_0^1 \frac{\sin x}{x} + \int_1^A 1/x < \infty.$$

Nyt $\int_0^A \sin x\; e^{-xt}\,dx = \frac{1-\cos t\; e^{-At} - t\sin t\; e^{-At}}{1+t^2} =: g_A(t)$, mikä nähdään osittaisintegroimalla [teht.9.5 tai Riemann-integraalin teoria [R1]] kahdesti ja ratkaisemalla siitä $\int_0^A \sin x\; e^{-xt}\,dx$. $A \ge 1 \wedge t \in]0,\infty[\Longrightarrow |g_A(t)| < 3/(1+t^2) \in L^1$, koska $te^{-At} \le Ae^{-A^2} < 1$ (derivaatan nollakohdat, kun $A \ge 1$). Niinpä

$$I = \int_0^\infty g_A(t)\,dt \overset{dom.konv.}{=} \int_0^\infty \lim_{A\to\infty} g_A(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\overset{mon.konv.}{=} \lim_{k\to\infty} \int_0^k \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{k\to\infty} \overline{\mathrm{arc}}\tan(k) - \overline{\mathrm{arc}}\tan(0) = \pi/2$$

Kommentteja: Huom.: Jos f on Riemann-integroituva, se on myös Lebesgue-integroituva (Lebesgue-mitan suhteen) ja nämä integraalit yhtyvät [R2:2.20tod]. Jos f:llä on jokin epäoleellinen Riemann-integraali (R)-$\int_a^b f$ ja $f \ge 0$ (vast. $\int_a^b |f| < \infty$), niin $\exists$ (L)-$\int_a^b f =$(R)-$\int_a^b f$ [mon.konv.] (vast. [dom. konv.]) (htl).
Huom.: $\frac{\sin x}{x} \notin L^1$ (nähdään sopivalla minorantilla (esim. jono kolmioita)), mutta sillä on olemassa em. epäoleellinen integraali (muttei Lebesgue-integraalia $\mathbb{R}_+$:n yli (eikä oleellista Riemann-integraalia).

Dom. konv.: [R2:1.34]: $\mathcal{L}(X,\mathbb{C}) \ni f_n \to f \wedge |f_n| \le g \in L^1(X)\; \forall n \implies f_n \underset{L^1}{\to} f \wedge \int f_n \to \int f$.
(Selvästi $f_n \to f$ m.k. riittää, jos μ on täydellinen tai jos muutoin tiedetään $f \in \mathcal{L}$.)
Yllä ja aiemminkin on sovellettu seuraavaa lausetta:
Dom. konv.: $\mathcal{L}(X,\mathbb{C}) \ni f_r \overset{r\to a}{\to} f \wedge |f_r| \le g \in L^1(X)\; \forall r \implies f_r \underset{L^1}{\overset{r\to a}{\to}} f \wedge \int f_n \to \int f$.
(Tässä oltava $\mathbb{R} \ni r \to a \in [-\infty,\infty]$ tai $\mathbb{C} \ni r \to a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tms. Jos näet väite olisi epätosi, niin voitaisiin poimia jono $r_n \to a$ s.e. $\int |f - f_{r_n}| > \epsilon$, mikä johtaisi ristiriitaan. Edelleen $f_r \to f$ m.k. riittää, jos μ on täydellinen ($\mu = \mu^*$) tai jos f tiedetään ennalta mitalliseksi.) Myös Fatoun lemmalle, mon. konvergenssille etc. voidaan tehdä tämäntapaisia ylinumeroituvuus- tai m.k.-temppuja.

Tehtävä 10.6 ([8.12] *osin helppo – osin vaikeahko, pitkähkö, tärkeä*):
[R2:Exe8.5] Olkoon $M := M(\mathbb{R})$ eli kompleksisten Borel-mittojen avaruus normilla $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$. Liitetään jokaiseen $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ joukko

$$Q := Q_E := \{(x,y) \mid x+y \in E\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Mittojen $\mu, \nu \in M$ konvoluutioksi määritellään

$$(\mu * \nu)(E) := (\mu \times \nu)(Q)\;\; \forall E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}.$$

a) Todista, että $\mu * \nu \in M$ ja $\|\mu * \nu\| \le \|\mu\|\|\nu\|$.
b) Todista, että $\mu * \nu$ on se yksikäsitteinen $\lambda \in M$, jolla

$$\int f\,d\lambda = \int\int f(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

c) Todista, että konvoluutio on kommutatiivinen, assosiatiivinen ja distributiivinen yhteenlaskun suhteen.
d) Todista kaava

$$(\mu * \nu)(E) = \int \mu(E-s)\,d\nu(s)$$

(ts. konvoluution määritelmä yhtyy tehtävässä 7.6 käytettyyn).

Vastaus: Q todettiin Borel-tulomitalliseksi tehtävässä 10.1, joten konvoluutio on määritelty $\forall E \in \mathcal{B}$, kun kompleksisten mittojen tulo määritellään samaan tapaan kuin positiivisten ($\lambda(Q_x) = \lambda_1(Q_x) - \ldots \in \mathcal{L}$ [R2:8.6], joten tulomitta [R2:8.7] on hyvin määritelty kompleksisillekin). Koska tulomitta $\mu \times \nu$ voidaan esittää $4 \cdot 4$:n äärellisen pos. mitan lineaarikombinaationa, se on σ-additiivinen, siis kompleksinen mitta (tässä tapauksessa Borel-σ-algebrassa, siis Borel-mitta).

d) $(\mu * \nu)(E) := (\mu \times \nu)(Q) := \int_Y \mu(Q^y)\,d\nu(y) := \int_Y \mu(\{x \mid x+y \in E\})\,d\nu(y) = \int_Y \mu(E-y)\,d\nu(y)$ eli määritelmä yhtyy tehtävän 7.6 määritelmään, joka on todistettu σ-additiiviseksi, siis $(\mu * \nu)$ on mitta. Koska se on määritelty kaikilla $E \in \mathcal{B}$, se on Borel-mitta, siis $\mu * \nu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$.

a) Olkoon $\{E_i\}$ joukon $E := \mathbb{R}$ mitallinen ositus, jolloin $(E - s) = \uplus_i (E_i - s)\; \forall s \in \mathbb{R}$. $\sum_i |\mu * \nu(E_i)| := \sum_i |\int_\mathbb{R} \mu(E_i - y)\,d\nu(y)| \le \sum_i \int_\mathbb{R} |\mu(E_i - s)|\,d|\nu|(s) \le \sum_i \int_\mathbb{R} |\mu|(E_i - s)\,d|\nu|(s) \overset{R2:1.27}{=} \int_\mathbb{R} \sum_i |\mu|(E_i - s)\,d|\nu|(s) = \int_\mathbb{R} |\mu|(E-s)\,d|\nu|(s) = \int_\mathbb{R} \|\mu\|\,d|\nu|(s) = \|\mu\|\|\nu\|$, joten $\|\mu * \nu\| := |\mu * \nu|(\mathbb{R}) \le \|\mu\|\|\nu\|$. ////

b) 1° Yksikäsitteisyys: $M(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})^*$ tai oikeammin $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})^* = \{f \mapsto \int_\mathbb{R} f\,d\mu \mid \mu \in M(\mathbb{R})\}$ (myös normit yhtyvät) [R2:6.19]. Niinpä $\int f\,d\lambda = \int f\,d\lambda'\; \forall f \in \mathcal{C}_0 \implies \lambda = \lambda'$

(koska niiden erotuksen normi on 0).

2° Kaava: Jos $f = \chi_E$, niin

$$\int_Y \int_X \chi_E(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) = \int_Y \int_X \chi_{E-y}(x)\,d\mu(x)\,d\nu(y) = \int_Y \mu(E-y)\,d\nu(y)$$

$$=: (\mu * \nu)(E) = \int \chi_E\,d(\mu * \nu).$$

Lineaarisuuden perusteella sama pätee kaikilla porrasfunktioilla. Olkoon $s_n \to f$ tasaisesti [R2:1.17] (f:n neljä osaa erikseen), tällöin $\int\int s_n \to \int\int f$, koska $|\int\int(s_n - f)| \le \|\mu\|\|\nu\| \sup|s_n - f| \to 0$, vastaavasti $\int_{\mathbb{R}} s_n\,d(\mu*\nu) \to \int_{\mathbb{R}} f\,d(\mu*\nu)$, mistä seuraa väite.

c) Komm.: $Q' := \{(y,x) \mid x+y \in E\} = Q$, joten $\nu(Q'^x) = \nu(Q_x)$. Niinpä $\nu * \mu(E) := \nu \times \mu(Q) = \nu \times \mu(Q') := \int_{\mathbb{R}} \nu(Q'^y)\,d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \nu(Q'^x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \nu(Q_x)\,d\mu(x) =: \mu \times \nu(Q) =: \mu * \nu(E)\ \forall E$.

Ass.:

$$((\mu*\nu)*\lambda)(E) := \int_{\mathbb{R}} (\mu*\nu)(E-x)\,d\lambda(x) := \int\int \mu((E-x)-s)\,d\nu(s)\,d\lambda(x)$$

$$= \int\int\int \chi_{E-x-s}(t)\,d\mu(t)\,d\nu(s)\,d\lambda(x)$$

$$\overset{Fubini}{=} \int\int\int \chi_E(x+s+t)\,d\nu(s)\,d\mu(t)\,d\lambda(x)$$

$$\overset{Fubini}{=} \int\int\int \chi_E(x+s+t)\,d\nu(s)\,d\lambda(x)\,d\mu(t) = ((\nu*\lambda)*\mu)(E) \overset{komm.}{=} (\mu*(\nu*\lambda)(E)\ \forall \mu,\nu,\lambda,E.$$

(Fubineissa funktio on selvästi tulomitallinen. Ensimmäinen Fubinin sovellus tapahtuu laskettaessa uloimman integrandin $\int\int \chi_{E-x-s}(t)\,d\mu(t)\,d\nu(s)$ arvoa kiinteällä x, selvästi $\int\int |\chi_{E-x-s}(t)|\,d\mu(t)\,d\nu(s) \le \|\mu\|\|\nu\| < \infty$ ja $\chi_{E-x}(s+t)$ on $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$-mitallinen, koska se on Borel-funktion $\chi_{E-x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja jatkuvan (siis $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$-mitallisen) funktion $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yhdiste [R2:1.12d], joten Fubini on oikeutettu. Toinen Fubini vast.)

Distr.: $*$ on selvästi bilineaarinen, erityisesti distributiivinen ($\alpha = 1 = \beta$):

$$(\mu*(\alpha\nu+\beta\lambda))(Q) = \int \alpha\nu(Q_x) + \beta\lambda(Q_x)\,d\mu(x) = (\alpha\mu*\nu+\beta\mu*\lambda)(Q)\ \forall Q \in \mathcal{B}$$

(lineaarisuus toisin päin seuraa kommutatiivisuudesta).

Kommentti: Huom.: tässä tutkitaan vain Borel-σ-algebraa ja sen tuloalgebroja, joten [8.12]-asioita ei tarvita.

Kompleksisillakin mitoilla $\int \chi_E\,d\mu = \mu(E)$, mikä nähdään paloittelemalla μ ja $\int$.

Huom.: 7.6:ssa todistettiin toisella tapaa määritelty $\mu*\nu$ mitaksi olettaen tehtävä 10.1 ratkaistuksi; d-kohta todistaa nämä määritelmät ekvivalenteiksi.

b) Itse asiassa [R2:1.17] todistaa, että mitallisten porrasfunktioiden joukko SMF on tiheässä sup-normilla varustetussa Banach-avaruudessa (htl) $\mathcal{L}_b := \{f \in \mathcal{L} \mid \sup|f| < \infty\}$. Tästä seuraa, että b-kohdan kaava pätee kaikilla $f \in \mathcal{L}_b$ (molemmat puolet ovat jatkuvia funktioita $\mathcal{L}_b \to \mathbb{C}$ (lhs,rhs$\in \mathcal{L}_b^*$) ja ne yhtyvät sen tiheässä osajoukossa).

Vastaavat tulokset (a–d) pätevät myös $\mathbb{R}^k$:ssa vastaavin todistuksin.

Tekemällä samaistus $f \leftrightarrow \mu$, missä $d\mu = f\,dm$, saadaan funktioille $f \in L^1$ määriteltyä konvoluutio, joka yhtyy tavalliseen L^1-konvoluutioon, joten L^1-konvoluutiolla (joka siis on M-konvoluution rajoittuma absoluuttisesti jatkuviin mittoihin) on samat ominaisuudet.

M konvoluutiolla varustettuna on *Banach-algebra* [R2:18.1] samoin kuin $\mathcal{L}(X)$ (missä X on Banach) varustettuna kuvausten yhdistämisellä.

Vihjeitä: **10.1**: Todista ensin, että $Q \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ (ks. teht. 10.6).

10.3: Aloita tapauksesta $f = \alpha\chi_E$.

10.4: Todista ensin, että jos $V \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^k$, niin $V = \cup_{q\in\mathbb{Q}^k} Q_{r_q}(q)$, missä avoin hyperkuutio $Q_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^k \,\big|\, |x_i - y_i| < r\ (i = 1,\dots,k)\}$ ja säteet (puolisärmät) r_q valitaan sopivasti. **10.6**: a) Todista ensin d-kohta, jolloin 7.6 hoitaa suurimman osan hommasta. c) Kommutatiivisuus: kirjoita $((\mu*\nu)*\lambda)(E)$ kolminkertaisena integraalia ja sovella Fubinia muutamaan kertaan.