Mat-1.150 Reaalianalyysi harjoitus 1 vastauksineen ti 20.9.1994

Laskuharjoitukset pidetään tiistaisin (20.9.94 alkaen) klo 12–14 salissa U322 (jossa luennotkin ovat). Kysymykset (yleensä pe), vastaukset (yleensä ti) ja oheismateriaalia saa huoneen U327 ilmoitustaululla olevasta kirjekuoresta. Tehtävistä tai muista asioista voi esittää kysymyksiä assistentille sähköpostitse (kalle.mikkola@hut.fi) tai vastaanotolla (U327); tiedotukset kirjoitetaan otaxin newssien ryhmään opinnot.matikka.

Useiden tehtävien perään on sulkuihin merkitty kohta, johon asti kirjaa kannattaa vähintään lukea ennen ko. tehtävän tekemistä. Tätä seuraavat kommentit nopeudesta ja erityisesti helppoudesta ovat tietysti subjektiivisia. *Numeroituva* tarkoittaa tässä kurssissa samaa kuin “enintään numeroituva” eli joukkoa, josta on olemassa injektio joukkoon $\mathbb{N}$. $B_r(x) := \{y \mid d(x,y) < r\}$ $(r > 0)$ on (metriikan d määräämä) x-keskinen r-säteinen (avoin) pallo [R2:1.4]. Pallo-sanan merkitys vaihtelee kirjasta toiseen; yo. merkintä on jossain määrin vakiintunut. Kaavoja edeltävät kvanttorijonot luetaan vasemmalta oikealle, esim. $\forall x \in V\ \exists r > 0\ (B_r(x) \subset V)$ tarkoittaa "kaikilla $x \in V$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B_r(x) \subset V$"eli r saa riippua x:stä toisin kuin kaavassa $\exists r > 0\ \forall x \in V\ (B_r(x) \subset V)$.

Tehtävä 1.1 ([1.3] *nopeahko*):
Todista seuraavat väitteet oikeiksi tai vääriksi:

(a) Funktio on f jatkuva joss jokaisen suljetun joukon F alkukuva $f^{-1}F$ on suljettu.
(b) Funktio on f jatkuva joss jokaisen suljetun joukon F alkukuva $f^{-1}F$ on mitallinen.
(c) Jos funktio f on jatkuva, niin jokaisen avoimen joukon G kuva fG on avoin.
(d) Jos funktio f on jatkuva, niin jokaisen suljetun joukon G kuva fG on suljettu.

Vihje: todistaminen vääräksi onnistuu helpoimmin vastaesimerkillä.

Vastaus: Olkoon tutkittava funktio $f : X \to Y$. $G \subset_\circ X$ tarkoittakoon, että $G \in \mathcal{T}_X$ (G on avoin X:ssä) ja $F \subset_c X$ tarkoittakoon, että $F^c \in \mathcal{T}_X$ (F on suljettu X:ssä). (Tarkoittaahan suljettu joukko avoimen joukon komplementtia [R2:1.11], siis $F \subset_c X \iff F^c \subset_\circ X$.) Funktio $f : X \to Y$ on jatkuva ($f \in \mathcal{C}(X, Y)$) joss $\forall G \in \mathcal{T}_Y$ $(f^{-1}G \in \mathcal{T}_X)$.

(a) Oikein: 1° Olkoon f jatkuva. Jos $F \subset_c Y$ eli $G := F^c \subset_\circ Y$, niin $f^{-1}(F) = f^{-1}(G^c) = (f^{-1}G)^c \subset_c X$ (koska $f^{-1}G \subset_\circ X$).
2° Olkoon $\forall F \subset_c Y$ $(f^{-1}F \subset_c Y)$. Jos $G \subset_\circ Y$, niin $G^c \subset_c Y$ ja siis $(f^{-1}G)^c = f^{-1}(G^c) \subset_c Y$, joten $f^{-1}G \subset_\circ Y$.

(b) Väärin: f:n jatkuvuus vaatii mm. $\mathcal{T}_X$:n ja $\mathcal{T}_Y$:n olemassaoloa, suljettujen joukkojen alkukuvien mitallisuus mm. $\mathcal{T}_Y$:n ja $\mathfrak{M}_X$:n olemassaoloa, niinpä toinen käsitteistä voi olla määritelty (tosi tai epätosi), vaikkei toinen olisi. Varmuuden vuoksi esitetään vielä vastaesimerkki: $Y := \{0, 1\}$, $\mathcal{T}_Y := \mathcal{P}(Y) := \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, Y\}$, $X := \{0, 1\}$, $\mathfrak{M}_X := \{\emptyset, X\}$, $f(0) := 0$ ja $f(1) := 1$. Joukko $\{1\}$ on suljettu, koska $\{1\}^c = \{0\} \in \mathcal{T}_Y$, mutta $f^{-1}\{1\} = \{1\} \notin \mathfrak{M}_X$.

(c) Väärin (jatkuva kuvaus ei välttämättä ole *avoin kuvaus*): jos esim. b-kohdan esimerkissä $\mathcal{T}_Y := \{\emptyset, X\}$ ja $\mathcal{T}_X := \mathcal{P}(X)$, niin f on jatkuva $(f^{-1}G \in \mathcal{T}_X\ \forall G \in \mathcal{T}_Y)$, mutta $f\{0\} = \{0\} \notin \mathcal{T}_Y$.

(d) Väärin (jatkuva kuvaus ei välttämättä ole *suljettu kuvaus*): yllä $f\{0\} = \{0\} \not\subset_c Y$.

Tehtävä 1.2 ([1.4] *pitkähkö*):
Osoita, että seuraavat määritelmät antavat saman $\mathbb{R}^k$:n topologian (ko. topologiaa kutsutaan $\mathbb{R}^k$:n tavanomaiseksi topologiaksi tai metriikan d määräämäksi topologiaksi, missä $d(x, y) := |x - y|$).

(a) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss se on avointen pallojen (mielivaltainen) yhdiste.
(b) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss jokainen $x \in V$ kuuluu johonkin V:n sisältämään x-keskiseen avoimeen palloon (eli $\forall x \in V\ \exists r > 0\ (B_r(x) \subset V)$).
(c) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss se on avointen pallojen numeroituva yhdiste.
(d) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss se on avointen n-ulotteisten kuutioiden ($C_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^k \mid |x_i - y_i| < r\ (i = 1, \ldots, k)\}$) numeroituva yhdiste.
(e) (Tämä pätee vain $\mathbb{R}^1$:ssä.) Joukko $V \subset \mathbb{R}^k$ on avoin joss se on avointen välien numeroituva pistevieras yhdiste (ts. $V = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} I_n$, missä jokainen I_n on avoin väli (ja $n \neq m \Rightarrow I_n \cap I_m = \emptyset$)).

Kohdissa a, c, d ja e luonnollisesti nollan joukon yhdiste eli "tyhjä yhdiste"toteuttaa annetun ehdon. Ohjeita: Topologioiden samuuden voit todistaa esim. todistamalla, että $V \in \mathcal{T}_a \Rightarrow V \in \mathcal{T}_b \Rightarrow V \in \mathcal{T}_c \Rightarrow V \in \mathcal{T}_d \Rightarrow V \in \mathcal{T}_a$ ja tapauksessa $\mathbb{R}^1$ lisäksi on vielä todistettava $\mathcal{T}_e$ samaksi jonkin em. topologian kanssa. Inkluusion

$\mathcal{T}_b \subset \mathcal{T}_c$ (ts. $V \in \mathcal{T}_b \Rightarrow V \in \mathcal{T}_c$) voit todistaa esim. toteamalla, että perhe $\mathcal{B} := \{B_r(q) \mid r \in \mathbb{Q}_+ \wedge q \in \mathbb{Q}^k \wedge B_r(q) \in V\}$ on numeroituva ja $V = \cup\mathcal{B}$. Muut $\mathbb{R}^k$-implikaatiot ovat melko helppoja. $\mathbb{R}^1$:n implikaation $V \in \mathcal{T}_b \Rightarrow V \in \mathcal{T}_e$ voit todistaa merkitsemällä jokaisella $q \in \mathbb{Q} \cap V$ symbolilla I_q kaikkien niiden avointen välien yhdistettä, joihin q kuuluu, sekä osoittamalla, että I_q on avoin väli, $I_q \neq I_{q'} \Rightarrow I_q \cap I_{q'} = \emptyset$ ja $V = \cup_{q\in\mathbb{Q}} I_q$.

Vastaus: 1° $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{T}_b$. Tod.: Olkoon $V \in \mathcal{T}_a$. Tällöin V on muotoa $\cup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_{r_\alpha}(x_\alpha)$. Jos siis $x \in V$, niin $\exists \alpha_0 \in \mathcal{A}$ s.e. $x \in B_{r_{\alpha_0}}(x_{\alpha_0})$. Olkoon $r := r_{\alpha_0} - |x - x_{\alpha_0}| > 0$. Tällöin $B_r(x) \subset B_{r_{\alpha_0}}(x_{\alpha_0}) \subset V$. Koska $x \in V$ oli mielivaltainen, $V \in \mathcal{T}_b$.

2° $\mathcal{T}_b \subset \mathcal{T}_c$. Tod. kuten ohjeissa: $\mathcal{B} \preceq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$, eli perhe $\mathcal{B}$ on numeroituva. Jos $x \in \cup\mathcal{B}$, niin $x \in B_r(q) \subset V$ joillain r, q; siis $\cup\mathcal{B} \subset V$. Jos sitten $x \in V$, niin (koska $V \in \mathcal{T}_b$) $B_R(x) \subset V$ jollain $R > 0$. Valitaan $r \in \mathbb{Q}_+$ s.e. $r < R/2$. Valitaan $q \in \mathbb{Q}^k$ s.e. $|x - q| < r$ (esim. $|q_i - x_i| < r/k\ \forall i$). Tällöin $y \in B_r(q) \Rightarrow |y - x| \leq |y - q| + |q - x| < 2r < R \Rightarrow y \in B_R(x)$, siis $x \in B_r(q) \subset B_R(x) \subset V$. Niinpä $B_r(q) \subset \mathcal{B}$ ja siis $x \in \mathcal{B}$. Koska $x \in V$ oli mielivaltainen, $V \subset \cup\mathcal{B}$. Ergo $V \in \mathcal{T}_c$.

3° Triviaalisti $\mathcal{T}_c \subset \mathcal{T}_a$, niinpä $\mathcal{T}_a = \mathcal{T}_b = \mathcal{T}_c$.

4° Helpolla laskulla nähdään, että $B_r(x) \subset C_r(x)$ ja $C_r(x) \subset B_{kr}(x)$. Näiden avulla nähdään, että $\mathcal{T}_b = \mathcal{T}_{b'}$, missä $\mathcal{T}_{b'}$:ssa sana pallo korvataan sanalla kuutio (ja $B_r(x)$ merkinnällä $C_r(x)$). $\mathcal{T}_{b'} \subset \mathcal{T}_d$ todistetaan kuten 2°; $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{b'}$ (mistä seuraa kaikkien neljän samuus) todistetaan seuraavasti:
Olkoon $V \in \mathcal{T}_d$. Tällöin $V = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_{r_n}(x_n)$. Jos $x \in V$, niin jollain N on $x \in C_{r_N}(x_N)$. $r := \min_{i=1,\dots,k}\{r_N - |x_i - (x_N)_i|\} > 0$, jolloin $C_r(x) \subset C_{r_n}(x_n)$, joten $C_r(x) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} C_{r_n}(x_n) = V$. Koska $x \in V$ oli mielivaltainen, $V \subset \mathcal{T}_{b'}$.

5° Olkoon $k = 1$. Selvästi $\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}_b$. Olkoon sitten $V \in \mathcal{T}_b$. Olkoon $x \in V$. Tällöin $]x - r, x + r[\subset V$ jollain $r > 0$, joten $a \leq x - r \wedge b \geq x + r$, kun $a := \inf\{y \mid]y, x[\subset V\}$ ja $b := \sup\{y \mid]x, y[\subset V\}$. $]a, x[\subset V$, sillä $y \in]a, x[\Rightarrow \exists y' < y$ $(]y', x[\subset V)$ ja siis $y \in]y', x[\subset V$. Vastaavasti $]x, b[\subset V$, joten $]a, b[\subset V$. Käytetään välistä $]a, b[$ merkintää I_x (kun a ja b on valittu kyseiselle x). Nyt $V = \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap V} I_q$, sillä toisaalta $\forall q \in \mathbb{Q} \cap V$ $(I_q \subset V)$ ja toisaalta, jos $x \in V$, niin $\exists q \in \mathbb{Q} \cap I_x$, jolloin selvästi $I_q = I_x$, joten $I_q = I_x \ni x$ ja siis $x \in \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap V} I_q$. Niinpä $V \in \mathcal{T}_e$, QED.

Tehtävä 1.3 ([1.11] *helppo, nopeahko*):

Olkoon $X = \{a, b, c, d\}$ ja $\mathcal{T} = \{\emptyset,\ X,\ \{a\},\ \{a, b\},\ \{a, b, c\}\}$. (a) Osoita, että $\mathcal{T}$ on X:n topologia. (b) Onko $\mathcal{T}$ σ-algebra? (Kukaan ei arvaa...) (c) Ellei, niin esitä pienin σ-algebra $\mathfrak{M}$, joka sisältää topologian $\mathcal{T}$. (Huom.: $\mathfrak{M}$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ Borel-σ-algebra.) (d) Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ funktio $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$. Onko f jatkuva, kun $\mathbb{R}$ varustetaan tavanomaisella topologiallaan? (e) Onko f mitallinen $\mathfrak{M}$:n suhteen? (Ts. onko f Borel-mitallinen?)

Vastaus: (a) Määritelmän [R2:1.2] ehdot toteutuvat:
(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. (ii) Jos $V_1, \dots, V_n \subset \mathcal{T}$, niin $V_1 \cap \dots \cap V_n$ on selvästi (inkluusion suhteen) pienin joukoista V_i, joka on siis $\mathcal{T}$:n jäsen (tämän kohdan helppous johtuu siis siitä, että $\mathcal{T}$:n alkiot sattuvat olemaan sisäkkäisiä). (iii) Jos $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset \mathcal{T}$, niin $\cup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$ on suurin joukoista V_α, joka siis on $\mathcal{T}$:n jäsen.

(b) Ei. $\{a\} \in \mathcal{T} \wedge \{a\}^c = \{b, c, d\} \notin \mathcal{T}$, joten $\mathcal{T}$ ei ole σ-algebra.

(c) $\{b\} = \{a, b\} \setminus \{a\} \in \mathfrak{M}$ [R2:1.6], $\{c\} = \{a, b, c\} \setminus \{a, b\} \in \mathfrak{M}$ ja $\{d\} = \{a, b, c\}^c \in \mathfrak{M}$. Koska kaikki X:n osajoukot ovat näiden äärellisiä yhdisteitä, $\mathcal{P}(X) \subset \mathfrak{M}$ (ts. kaikki X:n osajoukot ovat mitallisia). Toisaalta aina $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$, joten $\mathcal{P}(X) = \mathfrak{M}$. ($\mathfrak{M}$ on σ-algebra [R2:1.10]:n perusteella; tosin ehdot [1.3] olisi helppo tarkistaa.)

(d) Ei. $f^{-1}]3, 5[:= \{x \in X \mid f(x) \in]3, 5[\} = \{d\} \notin \mathcal{T}$, siis erään avoimen joukon alkukuva ei ole avoin.

(e) Kyllä. Kaikkien joukkojen $A \subset \mathbb{R}$ alkukuvat ovat X:n osajoukkoja, siis $\mathfrak{M}$:n alkioita; erityisesti avointen joukkojen alkukuvat ovat $\mathfrak{M}$:n alkioita.

Tehtävä 1.4 ([1.6] *helppo, nopea*):
Todista oikeaksi tai vääräksi:
Olkoot joukot $A_1, \dots, A_n$ mitallisia ja pistevieraita sekä $\cup_{k=1}^n A_k = X$. Olkoot $f_k : X \to Y$ mitallisia. Tällöin funktio $f := \sum_{k=1}^n \chi_{A_k} f_k$ (ts. $f(x) = f_k(x)$, jos $x \in A_k$ $(k = 1, \dots, n)$) on mitallinen $(X \to Y)$. (Aloita tapauksella $n = 2$.)

Vastaus: (a) $n = 2$ (vain malliksi): Olkoon $V \in \mathcal{T}_Y$. $x \in f^{-1}V$ joss $f(x) \in V$ joss $(x \in A_1 \wedge x \in f_1^{-1}V) \vee (x \in A_2 \wedge x \in f_2^{-1}V)$ joss $x \in (A_1 \cap f_1^{-1}V) \cup (A_2 \cap f_2^{-1}V)$. Siis $f^{-1}V = (A_1 \cap f_1^{-1}V) \cup (A_2 \cap f_2^{-1}V)$, joka on selvästi mitallinen. (Tätä sovellettiin äänettömästi [R2:1.9]:n todistuksessa.)

(b) Yleinen tapaus: Olkoon $V \in \mathcal{T}_Y$. $x \in f^{-1}V$ joss $f(x) \in V$ joss $(x \in A_k \wedge x \in f_k^{-1}V)$

jollain $k \in \{1, ..., n\}$ joss $x \in \cup_{k=1}^{n}(A_k \cap f_k^{-1}V)$. Siis $f^{-1}V = \cup_{k=1}^{n}(A_k \cap f_k^{-1}V) \in \mathfrak{M}$. (Huom.: aivan samalla todistuksella nähdään, että joukkoja A_k saisi olla numeroituvakin määrä.)

Tehtävän voi laskea nopeamminkin: χ_{A_k} on mitallinen, koska $A_k \in \mathfrak{M}$ [R2:1.9d]. Nyt $\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} f_k$:n mitallisuus seuraa kohdasta [R2:1.9c].

Tehtävä 1.5 ([1.12] *helppo, nopea*):
[R2:1.12a]:n mukaan tehtävän 1.3 f ja $\mathfrak{M}$ generoivat joukkoon $\mathbb{R}$ erään σ-algebran Ω. Mitkä ovat Ω:n alkiot?

Vastaus: Koska $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$, jokainen X:n osajoukko (erityisesti jokainen $f^{-1}E$, missä $E \subset \mathbb{R}$) on mitallinen; siis $\forall E \subset \mathbb{R}$ $(E \in \Omega)$ eli $\Omega = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Tehtävä 1.6 ([1.4] *keskiverto*):
Joukon $[0, \infty]$ topologia $\mathcal{T}$ on tapana määritellä seuraavasti: avaruuden $[0, \infty]$ avoimet välit ovat joukot $[0, \infty]$, $[0, b[$, $]a, b[$, $]a, \infty]$, joissa $0 \leq a < b \leq \infty$, ja avaruuden $[0, \infty]$ avoin joukko on mielivaltainen näiden yhdiste.
(Se, määritelläänkö tyhjä joukko $\mathbb{R}^1$:n (tai $[0, \infty]$:n) väliksi tai $\mathbb{R}^k$:n palloksi, vaihtelee kirjasta toiseen. Tässä tehtävässä sillä ei kuitenkaan ole merkitystä, koska tyhjä joukko on kuitenkin avoin, koska se on nollan välin yhdiste.)
(a) Osoita, että $\mathcal{T}$ on topologia.
(b) Millainen on pisteen ∞ ympäristö? Entä pisteen 0 ympäristö?
(c) Miten tämä liittyy seuraaviin peruskurssin käsitteisiin (tässä $0 < a < \infty$):

(i) $f(x) \to \infty$, kun $x \to a$.
(ii) $f(x) \to a$, kun $x \to \infty$.
(iii) $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$.
(iv) $f(x) \to a$, kun $x \to 0+$.

(d) Miten tulkitset seuraavat lauseet: $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$ on jatkuva

(i) pisteessä $x = \infty$.
(ii) pisteessä $x = 0$.

Huom.: x:n **ympäristö** on avoin joukko, johon x kuuluu. Jos $f : X \to Y$, missä X ja Y ovat topologisia avaruuksia, $a \in X$ ja $b \in Y$, niin
$\lim_{x \to b} f(x) = c$ *joss jokaista* c*:n ympäristöä* V *kohti on olemassa* b*:n ympäristö* U *s.e.* $x \in U \setminus \{b\} \Rightarrow f(x) \in V$.

(Huom.: (ei liity ratkaisuihin) yo. topologia on $[-\infty, \infty]$:n tavanomaisen topologian indusoima topologia [moniste:1.4] ja $[0, \infty]$ sekä $[-\infty, \infty]$ ovat kompakteja; vastaavasti myös joukkoon $\mathbb{C}$ voidaan liittää piste ∞, tästä tarkemmin [R2]:n loppuosassa.)

Vastaus: (a) Todetaan $\mathcal{T}$:n toteuttavan [R2:1.2]:n ehdot seuraavasti:
(i) $[0, \infty] \in \mathcal{T}$ ja $\emptyset = \cup_{\alpha \in \emptyset} I_\alpha \in \mathcal{T}$ (tyhjä yhdiste).
(ii) [R2:1.2]:n ehdossa (ii) riittäisi vaatia "$V \in \mathcal{T} \wedge V' \in \mathcal{T} \Rightarrow V \cap V' \in \mathcal{T}$", sillä (ii) seuraa tästä induktiolla (htl). Olkoon sitten $V = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$ ja $V' = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}'} I'_\alpha$, missä jokainen I_α ja I'_α on $[0, \infty]$:n avoin väli.
1° Jos $\infty \in V \cap V'$, niin jollain $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ on I_α muotoa $[0, \infty]$ tai $]a, \infty]$. Samoin jokin I'_{α_1} on muotoa $[0, \infty]$ tai $]a_1, \infty]$, joten jollain a_2 ($a_2 := \max(a_0, a_1)$ tms.) on $]a_2, \infty] \subset V \cap V'$. Merkitään tällöin $J_\infty :=]a_2, \infty]$.
2° Jos $\infty \neq x \in V \cap V'$, niin joillain $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ ja $\alpha_1 \in \mathcal{A}'$ on $x \in I_{\alpha_0}$ ja $x \in I'_{\alpha_1}$, niinpä $x \in]a, b[=: J_x$ joillain a, b $(a < b)$, ellei $x = 0$, jolloin $x \in [0, b[=: J_x$ jollain b.
3° Nyt jokaiselle $x \in V \cap V'$ on määritelty jokin $[0, \infty]$:n avoin väli $J_x \subset V \cap V'$ s.e. $x \in J_x$. Niinpä $V \cap V' = \cup_{x \in V \cap V'} J_x \in \mathcal{T}$.
(iii) Jos $V_\beta \in \mathcal{T}$ $\forall \beta \in \mathcal{B}$ ja $x \in \cup_{\beta \in \mathcal{B}} V_\beta =: V$, niin $x \in V_{\beta_x}$ jollain $\beta_x \in \mathcal{B}$ ja siis on olemassa avoin väli $I_x \subset V_{\beta_x}$ s.e. $x \in I_x$. Selvästi $V = \cup_{x \in V} I_x \in \mathcal{T}$.
(b) Pisteen ∞ ympäristö on avoin joukko V, johon ∞ kuuluu, ts. jokin $[0, \infty]$:n avointen välien I_α yhdiste, jossa $\infty \in I_\alpha$ jollain α eli jossa I_α on muotoa $[0, \infty]$ tai $]a, \infty]$ jollain α (ja jollain $a \in [0, \infty[$); siis joka tapauksessa V sisältää jonkin muotoa $]a, \infty]$ olevan joukon $(a < \infty)$; toisaalta jokainen muotoa $]a, \infty]$ oleva joukko on ∞:n ympäristö. Vastaavasti nollan ympäristö sisältää aina jonkin muotoa $[0, b[$ olevan joukon $(b > 0)$; toisaalta jokainen muotoa $[0, b[$ oleva joukko on 0:n ympäristö.
(c) (i) $\lim_{x \to a} f(x) \to \infty$ voidaan ilmaista seuraavin ekvivalentein tavoin:
"Jokaista ∞:n ympäristöä V kohti on oltava olemassa jokin a:n ympäristö W s.e. $x \in W \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V$."(*) eli
Jokaista $]c, \infty]$ $(c < \infty)$ kohti on olemassa jokin $]d, e[\ni a$ s.e. $x \in]d, e[\setminus\{a\} \Rightarrow f(x) \in]c, \infty[$. (**) eli

Jokaista $c < \infty$ kohti on olemassa $\delta > 0$ s.e. $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > c$. (***)
$\forall c < \infty\ \exists \delta > 0\ (x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > c)$. (****)
(*)$\Rightarrow$(**) nähdään valitsemalla $V :=]c, \infty] \in \mathcal{T}$, koska tällöin $a \in]d, e[$ jollain avoimella välillä $]d, e[\subset V$.
(**)$\Rightarrow$(*) nähdään valitsemalla $c < \infty$ s.e. $]c, \infty] \subset V$.
(**)$\Rightarrow$(***) nähdään valitsemalla $\delta := \min(|d-a|, |e-a|) > 0$.
(***)$\Rightarrow$(**) nähdään merkitsemällä $d := a - \delta$, $e := a + \delta$.
Kohdissa (ii)–(iv) nähdään vastaavasti seuraavaa:
(ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists c < \infty\ (\infty > x > c \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(a))$.
(iii) $\forall M < \infty\ \exists c < \infty\ (\infty > x > c \Rightarrow f(x) > M)$.
(iv) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (0 < x < \delta \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(a))$.

(d) "$f : X \to Y$ on jatkuva pisteessa $x_0 \in X$"tarkoittaa, että "jos V on $f(x_0)$:n ympäristö, niin on olemassa x_0:n ympäristö W s.e. $fW \subset V$ (ts. $x \in W \Rightarrow f(x) \in V$)"[R2:1.4] (huom.: ei "$x \in W \setminus \{x_0\} \Rightarrow ...$"), eli "$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Niinpä $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$ on jatkuva pisteessä ∞ joss jokaista $f(\infty)$:n ympäristöä V kohti on olemassa $c < \infty$ s.e. $f(]c, \infty]) \subset V$. f on jatkuva pisteessä 0 joss jokaista $f(0)$:n ympäristöä V kohti on olemassa $\delta > 0$ s.e. $f([0, \delta[) \subset V$.

(Huom.: $[0, \infty]$:n kompaktisuus todistetaan seuraavasti: Jos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ on $[0, \infty]$:n avoin peite, niin jollain α_0 on $\infty \in V_{\alpha_0}$, ts. $]a, \infty] \subset V_{\alpha_0}$ jollain $a < \infty$. Merkitään $V'_\alpha := V_\alpha \cap [0, \infty[= V_\alpha \setminus \{\infty\}$ $\forall \alpha$. Tällöin $V'_\alpha \in \mathcal{T}_{[0,\infty[}$ $\forall \alpha$ ja siis kompaktina joukkona $[0, a] \subset V'_{\alpha_1} \cup ... \cup V'_{\alpha_n}$ joillain $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Siis $[0, \infty] = [0, a] \cup]a, \infty] \subset V_{\alpha_0} \cup V_{\alpha_1} \cup ... \cup V_{\alpha_n}$.)