Mat-1.155 ODYjen teoria, 9. harjoitus ma 23.3.1998 klo 14–16, U325 (2 sivua)

Laskuharjoitukset ovat tästedes huoneessani U331 (yhä ma 14.15-16). Sama tilaisuus toimii myös vastaanottona ym. Mallivastausten korjatun version laitan vanhaan tapaan huoneeni ulkopuolella olevaan kirjekuoreen otettavaksi n. klo 16. Jos otat viimeisen, meilaa minulle (km@iki.fi) (tai kopioi lisää). Luentotauosta huolimatta laskaritaukoa ei ole lainkaan (10. tehtävät ovat jo kirjekuoressani).

Huom.: Tehtävässä 8.2(a) olisi päästy hieman helpommalla tiedolla $D\chi_{[0,1]} = \delta_0 - \delta_1 \in H^s\ \forall s < -1/2$ [Rauch:s.90] $\Longrightarrow \chi_{[0,1]} \in H^s\ \forall s < -1/2 + 1 = 1/2$.

Tehtävä 9.1 ([Appendix] *helppo, nopea, hyvä*):
Olkoon $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ja $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ s.e.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_n(x)v(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in L^q(\mathbb{R}^d),$$

Osoita, että $\partial^\alpha u_n \underset{\mathcal{D}'}{\to} \partial^\alpha u\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

Vastaus: $T_n \underset{\mathcal{D}'}{\to} T$ tarkoittaa, että $\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle\ \forall \phi \in \mathcal{D}$ (koska $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) := \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$ heikko*-topologialla).[1] Olkoon $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

$$\langle \partial^\alpha T_{u_n}, \phi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T_{u_n}, \partial^\alpha \phi\rangle := (-1)^{|\alpha|} \int u_n \partial^\alpha \phi$$

(ja $\int u_n \partial^\alpha \phi \to \int u \partial^\alpha \phi$, koska $\partial^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset L^q$)

$$\to (-1)^{|\alpha|} \int u \partial^\alpha \phi =: (-1)^{|\alpha|}\langle T_u, \partial^\alpha \phi\rangle =: \langle \partial^\alpha T_u, \phi\rangle.$$

Koska tämä pätee $\forall \phi \in \mathcal{D}$, on $\partial^\alpha T_{u_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \partial^\alpha T_u$, QED.

Tehtävä 9.2 ([s. 85] *helpohko, nopeahko, aika hyvä*):
Olkoon $P(D) = D^2 + aD + bI$, missä $D := i^{-1}\frac{d}{dx}$ (x-avaruutena $\mathbb{R}^1$). Olkoot $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ yhtälön $P(D)u = 0$ ratkaisuja ja $f(0) = g(0)$, $f'(0) = 1 + g'(0)$. $G(x) := f(x)\chi_{]-\infty,0]} + g(x)\chi_{]0,\infty[}$, $T\phi := -\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)G(x)\,dx$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Osoita, että T on operaattorin $P(D)$ perusratkaisu.

Vastaus: "$T \in \mathcal{D}'$ on operaattorin $P(D)$ perusratkaisu" tarkoittaa, että $P(D)T = \delta$ [Rauch:s. 85][2]. Ideana on se, että $P(D)(T * f) \overset{Prop2.5.2,s.84}{=} (P(D)T) * f = \delta * f = f$, joten $T * f$ on yhtälön $P(D)u = f$ ratkaisu. Toisaalta $P(D)T = \delta$ (avaruuden $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alkioina) tarkoittaa, että $P(D)T(\phi) = \delta(\phi) := \phi(0)\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Todetaan tämä mekaanisella laskulla:

Olkoon $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Valitaan $R > 0$ s.e. $\operatorname{supp}\phi \subset]-R, R[$.

$$\langle P(D)T, \phi\rangle = \langle D^2T, \phi\rangle + \langle aDT, \phi\rangle + \langle bT, \phi\rangle = \langle T, D^2\phi\rangle - a\langle T, D\phi\rangle + b\langle T, \phi\rangle$$

$$= -\int_{-R}^{R} G(x)[D^2\phi - aD\phi + b\phi]\,dx$$

$$= -\int_{-R}^{0} f(x)[D^2\phi - aD\phi + b\phi]\,dx - \int_{0}^{R} g(x)[D^2\phi - aD\phi + b\phi]\,dx.$$

$$\int_{-R}^{0} f(x)[D^2\phi - aD\phi]\,dx$$

$$= i^{-1}\Big|_{-R}^{0} f(x)[D\phi(x) - a\phi(x)] - \int_{-R}^{0} Df(x)[D\phi(x) - a\phi(x)]$$

$$= i^{-1}f(0)[D\phi(0) - a\phi(0)] + \int_{-R}^{0} Df(x)a\phi(x) - \Big|_{-R}^{0} Df(x)\phi(x) + \int_{-R}^{0} D^2f(x)\phi(x)$$

$= i^{-1}f(0)[D\phi(0) - a\phi(0)] - i^{-1}Df(0)\phi(0) + \int_{-R}^{0}[D^2f(x) + aDf(x)]\phi(x)$, vastaava lasku voidaan laskea g:llekin, jolloin saadaan

$$\langle P(D)T, \phi\rangle = i^{-1}[f(0) - g(0)][D\phi(0) - a\phi(0)] - i^{-1}[Df(0) - Dg(0)]\phi(0)$$

[1] Seuraavassa — kuten usein muulloinkin — samaistetaan funktio u ja sen määräämä distribuutio $T_u : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u\phi =: \langle T_u, \phi\rangle$; (huom.: $\partial^\alpha u$ (eli $\partial^\alpha T_u$) ei yleensä ole minkään funktion määräämä, kun $\alpha \neq 0$).

[2] Rauch tosin puhuu $\mathcal{S}'$-perusratkaisuista, siksi pitäisi alla käyttää sivun 252 4. viimeisen rivin kaavaa $\partial^\alpha(T * f) = (\partial^\alpha T) * f = T * (\partial^\alpha f)\ \forall T \in \mathcal{D}'\ \forall f \in \mathcal{D}$ (sivulla 84 $\forall T \in \mathcal{S}'\ \forall f \in \mathcal{S}$). Siksi näin saadaan ratkaisut kaikille $f \in \mathcal{D}$ (jopa kaikille $f \in \mathcal{S}$ silloin, kun löydetään $T \in \mathcal{S}'$). Nyt $G \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}'$, muttemme tiedä, onko $G \in \mathcal{S}'$ (ts. onko $T \in \mathcal{S}'$).

$$+\int_{-R}^{0}[D^2f(x)+aDf(x)+bf]\phi(x)+\int_{0}^{R}[D^2g(x)+aDg(x)+bg]\phi(x)$$
$$=0-i^{-1}i\phi(0)+0+0=\phi(0),\ \text{QED.}$$

(Huom.: sama pätee, jos $D:=\partial:=\frac{d}{dx}$ ja $f'(0)=-1+g'(0)$; i^{-1}:n kuljetus laskuissa oli tietenkin kivutonta.)

Tehtävä 9.3 ([Appendix,p.256] *helpohko, lyhyehkö*):
Todista: Olkoon[3] $f\in\mathcal{D}'(0,1)$. Tällöin $Df\in\mathcal{C}(0,1)\iff f\in\mathcal{C}^1(0,1)$.

Vihje: 1^o "$\Longleftarrow$": helppo lasku. 2^o "$\Longrightarrow$": Määrittele $F\in\mathcal{C}^1((0,1))$ s.e. $F'=Df$. Käytä $[1^o]$:a ja [Rauch:PropA.10,p.256] todistaaksesi, että $f\in\mathcal{C}^1(0,1)$.

Vastaus: 1^o "$\Longleftarrow$": $f\in\mathcal{C}^1\implies Df=f'$. Tod.: Olkoon $\phi\in\mathcal{D}(0,1)$, valitaan[4] $a,b\in(0,1)$ s.e. $\operatorname{supp}\phi\subset]a,b[$.

$$\langle Df,\phi\rangle:=-\langle f,\phi'\rangle:=-\int_0^1 f\phi'=-\int_a^b f\phi'=-\Big|_a^b f\phi+\int_a^b f'\phi=0+\langle f',\phi\rangle.\ \square$$

2^o "$\Longrightarrow$": Olkoon $g:=Df\in\mathcal{C}(0,1)$. $F(x):=\int_{1/2}^x g\in\mathcal{C}^1$, jolloin $F'=g$, ja kohdan 1^o perusteella $DF=g=Df$ eli $D(F-f)=0$ eli $F-f=$vakio [Rauch:PropA.10,p.256].[5] Niinpä $f=F+\text{vakio}\in\mathcal{C}^1$, QED.[6]

Tehtävä 9.4 ([Rauch:p.92] *keskitasoa, keskipitkä*):
$\delta\in H^s(\mathbb{R}^d)\iff s<-d/2$ [Rauch:s.90]. Niinpä $\delta\notin H^{-1/2}(\mathbb{R})=(H^{1/2}(\mathbb{R}))^*$ [Rauch:s.90] $(d=1)$, ts. $\delta:u\mapsto u(0)$ ei ole jatkuva lineaarinen funktionaali $H^{1/2}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$. Miten tämä on mahdollista?

Vihje: ota tehtävän 8.3 u ja siihen suppeneva $\{u_n\}$, jolle saat laskettua $\delta(u_n)$:n.

Vastaus: $\delta\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on alunperin määritelty vain funktioilla $\phi\in\mathcal{S}$. $\delta\in H^s$ tarkoittaa, että kuvaus $u\mapsto\delta(u)$ on jatkuva myös H^s-topologian (ei vain $\mathcal{S}$-topologian) suhteen, ja näin ollen voidaan laajentaa yksikäsitteisesti jatkuvaksi kuvaukseksi $H^s\to\mathbb{C}$ [Rauch:Prop2.3.1,s.70].[7].

Lemma: $u\in H^s\wedge s>1/2\implies\delta u=u(0)=\gamma\int\hat{u}$.
Tod.: Olkoon $\mathcal{D}\ni\phi_n\to u$ avaruudessa H^s [Rauch:Prop2.6.6,s.92]. Tällöin $\|\langle\xi\rangle^s(\hat{u}-\hat{\phi}_n)\|_2\to0$, joten

$$\|(\hat{u}-\hat{\phi}_n)\|_1\le\|\langle\xi\rangle^s(\hat{u}-\hat{\phi}_n)\|_2\|\langle\xi\rangle^{-s}\|_2\to0$$

(koska $\|\langle\xi\rangle^{-s}\|_2<\infty$). (Poistamalla ϕ_n:n tuosta näet, että $\hat{u}\in L^1$, minkä perusteella $u(0)=\gamma\int\hat{u}$.) Niinpä $\delta(u)\leftarrow\delta(\phi_n)=\phi_n(0)={}^8\gamma\int\hat{\phi}_n\to{}^9\gamma\int\hat{u}$, QED.

Ratkaisu: Olkoon $u\in H^{1/2}(\mathbb{R})\setminus L^\infty([-1,1])$ sama kuin tehtävässä 8.3. (ts. $\hat{u}=[\xi\ln\xi]^{-1}\chi_{[1,\infty[}$). $\hat{u}_n=[\xi\ln\xi]^{-1}\chi_{[1,n[}$). Dominoidun konvergenssin[10] perusteella

$$\|u-u_n\|_{H^{1/2}}=\int_1^\infty\langle\xi\rangle^{2\cdot1/2}|\hat{u}-\hat{u}_n|^2=\int\chi_{[n,\infty[}(\xi)\langle\xi\rangle[\xi\ln\xi]^{-2}\overset{dom.\ konv.}{\to}0,$$

ts. $u_n\to u$ avaruudessa $H^{1/2}$. Toisaalta $\|\langle\xi\rangle^s\hat{u}_n\|_2<\infty\ \forall s$ (koska u_n on rajoitettu ja kompaktikantajainen), joten $u_n\in H^s\ \forall s$. Niinpä yo. lemman perusteella $\delta(u_n)=\gamma\int\hat{u}_n$, mistä saataisiin

$$\delta(u)=\lim_n\delta(u_n)=\lim_n\gamma\int\hat{u}_n=\gamma\int\hat{u}\overset{teht.\ 8.3}{=}\infty,$$

(ristiriita) jos δ olisi jatkuva $H^{1/2}$:ssa (eksaktisti: jos sillä olisi jatkuva laajennos sinne), joten δ ei sitä ole, QED.[11]

---

[3] $\mathcal{D}'(0,1):=\mathcal{D}'((0,1))$, $\mathcal{C}(0,1):=\mathcal{C}((0,1))$, (eli suomeksi $\mathcal{C}(]0,1[)$), yleinen merkintä.

[4] Jottei tarvittaisi sijoitusta $f(0)\psi(0)$, koska mm. tapauksessa $f=1/x$ on $f(0)=\infty$ (joskin silti aina $\lim_{\epsilon\to0+}f(\epsilon)\phi(\epsilon)=0$, koska $\phi(\epsilon)=0$ pienillä ϵ, joten ilmankin tätä selvittäisiin, tämä vain selventää.

[5] $\mathbb{R}^1$:ssä tämä yleistyy helposti induktiolla: $D^\alpha G=0\ \forall|\alpha|=k\implies G$ on (enintään) k-asteinen polynomi.

[6] Siis $\exists c\in\mathbb{C}$ s.e. $\langle F-f,\phi\rangle=\langle c,\phi\rangle\ \forall\phi$. Tästä $\langle f,\phi\rangle=\langle F-c,\phi\rangle\ \forall\phi$, eli f on sama kuin funktion $F-c\in\mathcal{C}^1$ määräämä distribuutio. Tietysti $c=-f(1/2)$, koska valitsimme $F(1/2)=0$.

[7] Tätäkin kuvausta merkitään δ:lla, vaikkakin voi olla $\delta(u)\ne u(0)$, jos $u\in H^s\setminus\mathcal{S}$ (tosin voidaan todistaa, että $u\in H^s\cap\mathcal{C}\implies\delta(u)=u(0)$, tällöin näet löytyy jono $\mathcal{S}\ni\phi_n\underset{H^s}{\to}u$ s.e. $\phi_n(0)\to u(0)$ (mistä $\delta(u)=\lim\delta(\phi_n)=u(0)$)). Voihan jopa olla, että $u(0)$ ei ole edes määritelty, vrt. teht. 8.3, jossa "$u(0)=\infty$"

[8] Sijoita $f=\mathcal{R}\phi_n$ yhtälöön $\hat{f}(0)=\gamma\int f$.

[9] Onhan $|\int\hat{u}-\int\hat{\phi}_n|\le\int|\hat{u}-\hat{\phi}_n|=\|\hat{u}-\hat{\phi}_n\|_1\to0$.

[10] Majorantti $\chi_{[1,\infty[}|\langle\xi\rangle[\xi\ln\xi]^{-2}|\in L^1$ tehtävän 8.3 perusteella.

[11] Eikä δ:aa ole tapana siellä edes määritellä, paitsi tietysti jatkuville funktioille.