Mat-1.155 ODYjen teoria, 8. harjoitus ma 16.3.1998 klo 14–16, U325 (4 sivua)

Tehtävä 8.1 (*keskitasoa, keskipitkä*):
Funktio $z \mapsto e^{itz}$ on kokonainen[1] (kiinteällä t). Olkoon $F \in L^2([-1,1])$. Osoita, että $f(z) := \int_{-1}^1 e^{itz} F(t)\,dt$ on kokonainen.

Vastaus: Tässä, kuten integraaleissa yleensäkin, analyyttisyyden todistaminen tapahtuu helpoiten Moreran lauseen avulla:

Moreran lause. Olkoon $\Omega \subset\!\!\circ\, \mathbb{C}$ ja $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. $f \in H(\Omega)$ joss $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ aina[2] kun $\Gamma \subset \Omega$ on kolmio. [R:RCA:10.17]

Huom. $|e^{itz}| = |e^{it\operatorname{Re} z} e^{iti\operatorname{Im} z}| = |e^{it\operatorname{Re} z}||e^{-t\operatorname{Im} z}| = 1 \cdot e^{-t\operatorname{Im} z} \le e^{|\operatorname{Im} z|} =: M_z$ $\forall t \in [-1,1]$.

1^o $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$: Todistetaan f:n jatkuvuus mielivaltaisessa $z \in \mathbb{C}$:

$$|f(z+h) - f(z)| = |\int_{-1}^1 (e^{it(z+h)} - e^{itz}) F(t)\,dt| = |\int_{-1}^1 (e^{ith} - 1) e^{itz} F(t)\,dt|$$

$$\le \int_{-1}^1 |(e^{ith} - 1) e^{itz} F(t)|\,dt \overset{*}{\le} [\int_{-1}^1 |(e^{ith} - 1) e^{itz}|^2\,dt]^{1/2}\, \|F\|_{L^2([-1,1])}$$

$$\le [\int_{-1}^1 (\epsilon')^2 \cdot M_z^2\,dt]^{1/2}\, \|F\|_{L^2([-1,1])} = \sqrt{2}\epsilon' M_z \|F\|_2 < \epsilon,$$

kun $|h| < \delta$, missä $\epsilon' = \epsilon'_{F,\epsilon,z} := \epsilon/(\sqrt{2}\|F\|_2 M_z + 1)$ ja $\delta = \delta_{F,\epsilon,z} > 0$ valitaan[3] s.e. $|h| < \delta \implies |e^{ith} - 1| < \epsilon'$. Siis f on jatkuva z:ssa.

[1]Funktio on **kokonainen** (*entire*) joss se on analyyttinen (eli holomorfinen) koko $\mathbb{C}$:ssä (siis $\in H(\mathbb{C})$).

[2]**Muista:** näistä alaviitteistä ei kannata paljon välittää!
$\int_\Gamma f(z)\,dz := \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$, kun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ on polun Γ paloittain jatkuvasti derivoituva esitys [R:RCA:10.8(1)]. Tätä ei tarvitse nyt tietää, eikä sitäkään, että lauseessa voidaan kolmioiden sijaan tutkittavana käyräjoukkona käyttää vaikkapa koordinaattiakseleiden suuntaisia suorakulmioita [Bruce P. Palka].

[3]Selitys: $w \mapsto e^w$ on jatkuva, joten $\exists \delta' > 0$ s.e. $|w| < \delta' \Rightarrow \epsilon' > |e^w - e^0| = |e^w - 1|$. Jos $|h| < \delta'$, niin $|ith| = |th| \le |h| < \delta'$; siis $\delta := \delta'$ kelpaa.

($*$: Hölderin epäyhtälö [R:RCA:3.8]: $\|gh\|_1 \le \|g\|_p \|h\|_q$, kun $p, q \in [1,\infty] \wedge$ "$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$".)

2^o Todistetaan, että $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ mielivaltaisella kolmiolla $\Gamma \subset \mathbb{C}$:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \int_{-1}^1 e^{itz} F(t)\,dt\,dz \overset{Fubini^4}{=} \int_{-1}^1 \int_\Gamma e^{itz} F(t)\,dz\,dt$$

$$= \int_{-1}^1 F(t)[\int_\Gamma e^{itz}\,dz]\,dt \overset{e^{itz} \in H}{=} \int_{-1}^1 F(t)[0]\,dt = 0, \quad \text{QED.}$$

Fubini: Fubinin lausehan [R:RCA:8.8] kertoo, että integrointijärjestystä saa vaihtaa, kun integrandi on $[0,\infty]$-arvoinen tai absoluuttisesti suppeneva (eli $\int\int |...| < \infty$) (tietenkin integrandin on oltava $\mathbb{R}^2$-mitallinen, nyt sekin ehto toteutuu, koska (edes paloittain) jatkuvat ovat, samoin $\mathbb{R}^1$-mitalliset (kuten F) sekä mitallisten tulot, summat, yhdisteet yms.).

TAPA 2: Moreran lauseen sijaan voisi todistaa, että $\exists f'(z) = itf(z)\ \forall z$, ts. että $|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - itf(z)| \to 0\ \forall x$, mikä onnistuu esim. Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen [R:RCA:1.34&9.3a] avulla. (Majorantti löytyy esim. väliarvolauseen avulla, vrt. tehtävä 7.3 (1^o).)

Tehtävä 8.2 ([s. 89] *vaikeahko, pitkähkö, kannattaa lukaista*):
Millä s:n arvoilla pätee $\chi_{[0,1]} \in H^s(\mathbb{R})$? Entä $\chi_{[0,1]\times[0,1]} \in H^s(\mathbb{R}^2)$?

Vastaus: (a) $f := \chi_{[0,1]} \in L^1$, joten $\hat{f}(\xi) := \gamma \int_\mathbb{R} f(x) e^{-ix\xi}\,dx = \gamma \int_0^1 e^{-ix\xi} = \gamma \Big|_0^1 \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} = \gamma \frac{e^{-i\xi} - 1}{-i\xi}$, jos $\xi \ne 0$; $\hat{f}(0) = \gamma \int_0^1 1 \cdot e^0\,dx = \gamma$ (ja $\hat{f} \in \mathcal{C}_v(\mathbb{R})$, koska $f \in L^1$). Nyt [Rauch:s. 89]

$$\|f\|_{H^s}^2 := \|\sqrt{1+\xi^2}^s \hat{f}\|_2^2 = \int_\mathbb{R} (1+\xi^2)^s |\hat{f}|^2$$

(nyt käytetään parillisuutta $|\hat{f}(-\xi)| = |\hat{f}(\xi)|$)

$$= 2\int_0^\infty (1+\xi^2)^s |\hat{f}|^2 = 2\int_0^1 + 2\int_1^\infty.$$

Koska $\hat f$ on jatkuva (siis rajoitettu kompaktissa $[0,1]$), $\int_0^1 < \infty$. Nyt siis on laskettava, millä s on $\int_1^\infty (1+\xi^2)^{2s}|\hat f|^2 < \infty$. $|\hat f(\xi)| < 2/\xi$, joten

$$\mathbf{1^o} \qquad \int_1^\infty (1+\xi^2)^s |\hat f(\xi)|^2\,d\xi \le \int_1^\infty (1+\xi^2)^s \frac{4}{\xi^2} \le 4\int_1^\infty (2\xi^2)^s \frac{1}{\xi^2}$$

$$\le 4\cdot 2^s \int_1^\infty \xi^{2s}\frac{1}{\xi^2} = 2^{s+2}\int_1^\infty \xi^{2s-2} = 2^{s+2}\Big|_1^\infty \xi^{2s-1}/(2s-1) < \infty,$$

kun $2s-1<0$ eli $s<1/2$. Siis $f \in H^s(\mathbb{R})\ \forall s < 1/2$.

2° Olkoon sitten $s \ge 1/2$. Tällöin

$$\int_1^\infty (1+\xi^2)^s|\hat f(\xi)|^2\,d\xi > \int_{[2\pi,\infty[} = \int_{\dot\bigcup_{n=1}^\infty [2n\pi,(2n+2)\pi[}$$

($\dot\bigcup$ tarkoittaa erillisten joukkojen yhdistettä, se siis tarkoittaa muuten samaa kuin $\cup$ mutta kertoo lisäksi, että $n \ne m \Rightarrow E_n \cap E_m = \emptyset$; nyt $\int_{\dot\bigcup_n E_n} g = \sum_n \int_{E_n} g$ [R:RCA:1.29&1.18a], joten)

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_{[2n\pi,(2n+2)\pi[} (1+\xi^2)^s|\hat f(\xi)|^2\,d\xi > \sum_{n=1}^\infty \int_{[2n\pi+\pi/2,2n\pi+3\pi/2[} \xi^{2s}|\hat f(\xi)|^2\,d\xi$$

(nyt $|e^{i\xi}-1|>1$, kun $\xi \in [2n\pi+\pi/2, 2n\pi+3\pi/2[$ (piirrä kuva))

$$> \sum_{n=1}^\infty \gamma^2 \int_{[2n\pi+\pi/2,2n\pi+3\pi/2[} \xi^{2s}\frac{1}{\xi^2}\,d\xi$$

$$= \gamma^2 \sum_{n=1}^\infty \int_{[2n\pi+\pi/2,2n\pi+3\pi/2[} \xi^{2s-2}\,d\xi =: \gamma^2 I$$

Jos $2s-2 \ge 0$ (eli $s \in [1,\infty[$), niin

$$I > \sum_{n=1}^\infty \int_{[2n\pi+\pi/2,2n\pi+3\pi/2[} (2n\pi)^{2s-2} = \sum_{n=1}^\infty \pi(2n\pi)^{2s-2} \ge \sum \pi = \infty.$$

Tapauksessa $s \in [1/2, 1[$ edellinen meneekin seuraavasti (koska $(n+1)^{2s-2} < n^{2s-2}$):

$$I > \sum_{n=1}^\infty \int_{[2n\pi+\pi/2,2n\pi+3\pi/2[} (2(n+1)\pi)^{2s-2}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \pi(2(n+1)\pi)^{2s-2} = \pi(2\pi)^{2s-2}\sum_{k=2}^\infty k^{2s-2} = \infty$$

koska tällöinkin $2s-2 \ge -1$. Siis $f \notin H^s$, kun $s \ge 1/2$.

Ergo: $\chi_{[0,1]} \in H^s(\mathbb{R})$ joss $s < 1/2$. [1^o&2^o]

(b) Lasketaan taas $\hat g$ ja katsotaan sitten, millä s on $\|g\|_{H^s}^2 < \infty$. $g(x) := \chi_{[0,1]\times[0,1]}(x) = \chi_{[0,1]}(x_1)\chi_{[0,1]}(x_2) = f(x_1)f(x_2)$ (tässä $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$). Merkitään $\gamma_1 := (2\pi)^{-1/2}$, $\gamma_2 := (2\pi)^{-2/2} = \gamma_1\gamma_1$.

$$\hat g(\xi) := \gamma_2 \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g(x)e^{-ix\xi}\,dx_1\,dx_2$$

$$= \gamma_1 \int_{-\infty}^\infty \gamma_1 [\int_{-\infty}^\infty f(x_1)f(x_2)e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\,dx_1]\,dx_2$$

$$= \gamma_1 \int_{-\infty}^\infty f(x_2)e^{-ix_2\xi_2}\gamma_1[\int_{-\infty}^\infty f(x_1)e^{-ix_1\xi_1}\,dx_1]\,dx_2$$

$$= \gamma_1 \int_{-\infty}^\infty f(x_2)e^{-ix_2\xi_2}[\gamma_1\int_{-\infty}^\infty f(x_1)e^{-ix_1\xi_1}\,dx_1]\,dx_2$$

$$= \gamma_1 \int_{-\infty}^\infty f(x_2)e^{-ix_2\xi_2}[\hat f(\xi_1)]\,dx_2 = [\hat f(\xi_1)]\gamma_1 \int_{-\infty}^\infty f(x_2)e^{-ix_2\xi_2}\,dx_2 = [\hat f(\xi_1)]\hat f(\xi_2).$$

Sitten lasketaan normi:

$$\|g\|_{H^s}^2 := \|\sqrt{1+\xi^2}^s\hat g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1+\xi^2)^s|\hat g|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (1+\xi_1^2+\xi_2^2)^s|\hat f(\xi_1)|^2|\hat f(\xi_2)|^2\,d\xi_1\,d\xi_2 =: J.$$

$$\le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |(1+\xi_1^2)(1+\xi_2^2)|^s|\hat f(\xi_1)|^2|\hat f(\xi_2)|^2\,d\xi_1\,d\xi_2$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} (1+\xi_2^2)^s |\hat f(\xi_2)|^2 [\int_{\mathbb{R}} (1+\xi_1^2)^s |\hat f(\xi_1)|^2\, d\xi_1]\, d\xi_2 = \|f\|_{H^s}^2 < \infty$$

(a)-kohdan perusteella, jos $0 \le s < 1/2$. Jos sitten $s \ge 1/2$, niin

$$J \ge \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |1+\xi_2^2|^s |\hat f(\xi_1)|^2 |\hat f(\xi_2)|^2\, d\xi_1\, d\xi_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |1+\xi_2^2|^s |\hat f(\xi_2)|^2 [\int_{-\infty}^{\infty} |\hat f(\xi_1)|^2\, d\xi_1]\, d\xi_2$$

$$\ge \|\hat f\|_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} |1+\xi_2^2|^s |\hat f(\xi_2)|^2\, d\xi_2 = \|\hat f\|_2^2 \|f\|_{H^s}^2 = \infty$$

(a)-kohdan perusteella. Siis jälleen $\chi_{[0,1]\times[0,1]} \in H^s(\mathbb{R}^2)$ joss[5] $s < 1/2$.

Tehtävä 8.3 ([Exe2.6.5,s. 94] *vaikeahko, keskipitkä, aika opettava*): Konstruoi $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ s.e. $u \notin L^\infty([-1,1])$ (tämä siis todistaa, että ehtoa $s > d/2+k$ Sobolevin upotuslauseessa [Th2.6.7] ei voi muuttaa muotoon $s \ge d/2+k$).

Vihje: Valitse $f \in L^2(\mathbb{R})$ s.e. $f \ge 0 \wedge \langle\xi\rangle^{-1/2} \notin L^1(\mathbb{R})$. Määrittele $u := \mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{-1/2} f)$. Muodollinen todistus: $u(0) = \gamma\int \langle\xi\rangle^{-1/2} f\, d\xi = \infty$. Eksaktin todistuksen siitä, että u ei ole rajoitettu missään 0:n ympäristössä, saat osoittamalla (esim. kaavan (2.2.7) avulla), että $\lim_{n\to\infty}\int u(x) n e^{-(nx)^2/2}\, dx = \infty$ (miksi tämä todistaa sen?).[6]

Vastaus: 1$^{\mathbf{o}}$ Väite: $u \notin L^\infty([-1,1])$. Tod.: Kohdan 3^o perusteella vihjeen mukaiset f ja u ovat olemassa ja $u \in H^{1/2} \subset H^0 = L^2$.

Määritellään $\phi_n(x) := ne^{-(nx)^2/2}$, jolloin $\hat\phi_n(\xi) = e^{-(\xi/n)^2/2}$, koska $\mathcal{F}e^{x^2/2})e^{\xi^2/2}$ [Rauch:p.65] ja $\mathcal{F}g(\lambda\cdot) = |\lambda|^{-d}\hat g(\cdot/\lambda)$ [Rauch:Prop2.2.2(iii)]. Koska $\phi_n \in \mathcal{S} \subset L^2$, on $\int |u\phi_n| \le \|u\|_2\|\phi_n\|_2 < \infty$, siis kaikki tässä laskettavat integraalit ovat olemassa. Sijoituksella $t := nx$ saadaan $\|\phi_n\|_{L^1([-1,1])} := \int_{-1}^1 \phi_n(x)\, dx = \int_{-n}^n e^{-t^2/2}\, dt \to \|\phi_1\|_1 < \infty$ (*). Toisaalta $\frac{\partial\phi_n(x)}{\partial n} = [1-(2nx^2/2)n]e^{-(nx)^2/2} \le 0\ \forall x \ge 1$, joten[7] $\int_1^\infty u\phi_n \overset{dom.\ konv.}{\to} \int_1^\infty 0 = 0$, vast. $\int_{-\infty}^1 \to 0$, joten koska $\int u\phi_n \to \infty$ [2^o], niin välttämättä $\int_{-1}^1 u\phi_n \to \infty$, vaikka $|\int_{-1}^1 u\phi_n| \le \|u\|_{L^\infty([-1,1])}\|\phi_n\|_{L^1([-1,1])} \overset{[(*)]}{\le} \|u\|_{L^\infty([-1,1])}\|\phi_1\|_{L^1([-1,1])}$, joten on oltava $\|u\|_{L^\infty([-1,1])} = \infty$, ts. $u \notin L^\infty([-1,1])$, QED.

2$^{\mathbf{o}}$: Väite $\int u\phi_n \to \infty$. Tod.: $\langle u, \phi_n\rangle \overset{[(2.2.7)\&Prop2.4.4]}{=} \langle \hat u, \hat\phi_n\rangle$ (koska $\mathcal{F}\phi_n = \mathcal{F}\mathcal{R}\phi_n$), ja $\langle \hat u, \hat\phi_n\rangle = \int \hat u\hat\phi_n = \int \hat u e^{-(\xi/n)^2/2} \overset{monot.\ konv.}{\to}= \int \hat u e^{-0} = \int \hat u = \|\hat u\|_1 = \infty$ (onhan $\hat u = \langle\xi\rangle^{-1/2} f \ge 0$ ja $\langle\xi\rangle^{-1/2} f \notin L^1$).

3$^{\mathbf{o}}$: Väite: Vihjeen mukainen u on olemassa. Tod.: Jos $f \in L^2(\mathbb{R})$ s.e. $f \ge 0 \wedge \langle\xi\rangle^{-1/2} \notin L^1(\mathbb{R})$, ja $u := \mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{-1/2} f)$, niin [Rauch:p.89Def] $\|u\|_{H^{1/2}} := \|\langle\xi\rangle^{1/2}\hat u\|_2 = \|\hat f\|_2 < \infty$, joten todella $u \in H^{1/2}$. Mutta onko tällaista f olemassa?

$L^2_{\mathrm{loc}} \subset L^1_{\mathrm{loc}}$, joten paikalliset integroitumattomat piikit eivät ole L^2-muotoisiakaan. Siis funktion on kuoltava äärettömyydessä hyvin hitaasti muttei liian hitaasti.

Kokeillaan: $f = \xi^r\chi_{[1,\infty[}$. Nyt $\int_1^\infty \xi^r = \Big|_1^\infty \xi^{r+1}/(r+1) < \infty \iff r+1 < 0 \iff r < -1$, joten $f \in L^2 \iff 2r < -1 \iff r < -1/2$ ja $\langle\xi\rangle^{-1/2} f \in L^1 \iff r - 1/2 < -1 \iff r < -1/2$, eli jos valitaan r niin suureksi, että jälkimmäinen ehto ei toteudu, niin ei toteudu edellinenkään. On siis otettava hieman pienempi funktio kuin $\xi^{-1/2}\chi_{[1,\infty[}$, mutta vain hieman, eksponenttia ei saa pienentää.

Mikäs f olisi tällainen? $\sum_{n=1}^\infty [n(\ln n)^p]^{-1} < \infty$ joss $p > 1$ [R:PMA:Th3.29], tässä siis vastaus. $f(\xi) := [\xi^{1/2}\ln\xi]^{-1}\chi_{[1,\infty[} \ge 0$, jolloin (huom.: $\langle\xi\rangle := \sqrt{1+\xi^2} \le \sqrt{2\xi^2} \le 2\xi\ \forall\xi \ge 1$, joten $\langle\xi\rangle^{-1/2} \ge \xi^{-1/2}/\sqrt{2}\ \forall\xi \ge 1$ (1)) $\|\langle\xi\rangle^{-1/2} f(\xi)\|_1 \overset{(1)}{\ge} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^{-1/2} f(\xi) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^\infty [\xi\ln\xi]^{-1} \overset{(2)}{\ge} \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=2}^\infty [n\ln n]^{-1} = \infty$, missä (2) saatiin integraalitestin perusteella.[8] Kuitenkin $\|f\|_2^2 = \int [\xi(\ln\xi)^2]^{-1} \le \sum_{n=1}^\infty [n(\ln n)^2]^{-1} < \infty$.

---

[5] Tapauksessa $s < 0$ ei suoraan todistettu mitään, mutta $H^r \subset H^s\ \forall r < s$ [Rauch:Prop2.6.3], joten $g \in H^0 \subset H^s\ \forall s < 0$.

[6] Tulos voidaan helposti yleistää osoittamaan, että jos $s \le d/2+k$, niin $H^s(\mathbb{R}^d) \not\subset \mathcal{C}_v^k$ (jopa $\exists u \in H^s$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ s.e. $|\alpha| = k \wedge \partial^\alpha u \notin L^\infty$) (toisin kuin tapauksessa $s > d/2+k$ [Rauch:Th2.6.7]).

[7] Majorantti: joukossa $[1,\infty[$ on $|u\phi_n| \le |u||\phi_1| \in L^1$ (koska $\|u\phi_1\|_1 = \int |u\phi_1| \le \|u\|_2\|\phi_1\|_2 < \infty$).

[8] Jos g on vähenevä, niin välillä $[1,\infty[$ on $g \ge \sum_{n=2}^\infty \chi_{[n-1,n[}\, g(n) =: h$ (koska

Siinähän se!

Tehtävä 8.4 (*työläs, tärkeä lemma*):
Näytä, että $\frac{x^\alpha}{\langle x\rangle^s} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ joss $s > |\alpha| + d/2$.

Vastaus: Huom.: $|x^\alpha| := |\prod_{k=1}^d x_k^{\alpha_k}| = \prod_{k=1}^d |x_k|^{\alpha_k} \le \prod_{k=1}^d |x|^{\alpha_k} = x^{\sum_k \alpha_k} =: x^{|\alpha|} \le \sqrt{1+|x|^2}^{|\alpha|} =: \langle x\rangle^{|\alpha|}$.

1^o "$\Leftarrow$": $|x^\alpha/\langle x\rangle^s| \le 1/\langle x\rangle^{s-|\alpha|}$, joten riittää osoittaa, että $\langle x\rangle^{-t} \in L^2$, kun $t > d/2$.

Lemma 0.0.1 *Olkoon $g : [0,\infty[\to [0,\infty]$ Borel-mitallinen funktio ja $f(x) = g(|x|)$. Tällöin $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_0^\infty g(r) a_d r^{d-1}\,dr \in [0,\infty]$, missä $a_d \in]0,\infty[$ on yksikköpallon (kuoren) $d-1$-ulotteinen mitta ("pinta-ala").*

Tod.: Ks. [R2:Exe8.6] ym., QED.[9]

$$\|\langle x\rangle^{-t}\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^d} \langle |x|\rangle^{-2t} = \int_0^\infty \langle r\rangle^{-2t} a_d r^{d-1}\,dr = \int_0^1 + a_d \int_1^\infty (1+r^2)^{-t} r^{d-1}\,dr$$

$$\le \int_0^1 + a_d \int_1^\infty (r^2)^{-t} r^{d-1}\,dr \le \int_0^1 + a_d \int_1^\infty r^{-2t+d-1}\,dr$$

$$= \int_0^1 + a_d \Big|_1^\infty \frac{r^{-2t+d}}{d-2t} = \int_0^1 + a_d \frac{1}{2t-d} < \infty,$$

koska $d - 2t < 0$ ja $\int_0^1 < \infty$ (jatkuvalla funktiolla on maksimi kompaktissa joukossa).

2^o (Saattaa $\exists$ helpompikin tapa kuin tämä väkisin tehty.)

$$\|x^\alpha/\langle x\rangle^s\|_2^2 = \int_{-\infty}^\infty \ldots \int_{-\infty}^\infty |x_1|^{2\alpha_1} \ldots |x_d|^{2\alpha_d} \langle x\rangle^{-2s}\,dx_1\ldots dx_d =: I_d$$

$$\ge \int_{y_{d+1}}^\infty |x_d|^{2\alpha_d} \ldots \int_{y_2}^\infty |x_1|^{2\alpha_1} \langle x\rangle^{-2s}\,dx_1\ldots dx_d.$$

$y_k^2 := 1 + \sum_{j=k}^d x_j^2 \ge 1$, jolloin $y_k^2 = y_{k+1}^2 + x_k^2$, joten $x_k \in]y_{k+1},\infty[\Longrightarrow y_k^2 < 2x_k^2$ (1). Selvästi $\langle x\rangle^2 = y_1^2 \overset{(1)}{\le} 2x_1^2$, joten

$$I_1 := \int_{y_2}^\infty x_1^{2\alpha_1} \langle x\rangle^{-2s}\,dx_1 \ge \int_{y_2}^\infty x_1^{2\alpha_1} (2x_1^2)^{-s}\,dx_1 = 2^{-s} \int_{y_2}^\infty x_1^{2\alpha_1 - 2s}\,dx_1$$

$$= 2^{-s} \Big|_{y_2}^\infty x_1^{2\alpha_1-2s+1}/(2\alpha_1 - 2s + 1) =: r_1 y_2^{2\alpha_1-2s+1}$$

(ts. $r_1 := -2^{-s}/(2\alpha_1 - 2s + 1) > 0$) (paitsi jos $2\alpha_1 - 2s + 1 \ge 0$, jolloin $I_1 = \infty$ ja näin ollen $I_2 = \int_{y_3}^\infty |x_2|^{2\alpha_2}\infty \ge \int_{y_3}^\infty 1 \cdot \infty = \infty$, $I_3 = \ldots = \infty$ ja induktiolla helposti $I_d = \infty$).

$$I_2 := \int_{y_3}^\infty x_2^{2\alpha_2} I_1\,dx_2 \ge \int_{y_3}^\infty x_2^{2\alpha_2} r_1 y_2^{2\alpha_1-2s+1}\,dx_2$$

$$\overset{(1)}{\ge} r_1 \int_{y_3}^\infty x_2^{2\alpha_2} (\sqrt{2}x_2)^{2\alpha_1-2s+1}\,dx_2 \ge r_1 \sqrt{2}^{2\alpha_1-2s+1} \int_{y_3}^\infty x_2^{2\alpha_2+2\alpha_1-2s+1}\,dx_2$$

$$\ge r_1 \sqrt{2}^{2\alpha_1-2s+1} \Big|_{y_3}^\infty x_2^{2\alpha_2+2\alpha_1-2s+2}/(2\alpha_2 + 2\alpha_1 - 2s + 2) =: r_2 y_3^{2\alpha_2+2\alpha_1-2s+2}.$$

Induktiolla nähdään, että $I_k := \int_{y_{k+1}} x_k^{2\alpha_k} I_{k-1}\,dx_k \ge r_k y_{k+1}^{2\sum_{j=1}^k \alpha_k - 2s + 2}$, missä $r_k \in \mathbb{R}_+$.
Yo. laskuissa on aina oletettu $2\sum_{j=1}^k \alpha_k - 2s + k < 0$; jos jollain k tämä ei ole tosi, niin $I_k = \infty$ ja selvästi myös koko L^2-normi (eli I_d) on ääretön (samalla logiikalla kuin tämä todettiin I_1:tä laskettaessa yllä), siis ehto $0 > 2\sum_{j=1}^d \alpha_k - 2s + d = 2(|\alpha| + d/2 - s)$ on välttämätön, QED.

$h(x) = g(\lceil x\rceil))$, joten $\int_1^\infty g \ge \int_1^\infty h = \sum_{n=2}^\infty g(n)$. Vastaavasti $\int_1^\infty g \le \sum_{n=1}^\infty g(n)$.

[9] Tätä tärkeää lemmaa tarvitset luultavasti usein! Muista, että löydät sen tästä (tosin se on helppo muistaa: $a_d r^{d-1}$ on r-säteisen pallon "ala", esim. $a_1 = 2$, $a_2 = 2\pi$, $a_3 = 4\pi$, ... (kaikki $\mathbb{R}_+$:ssa; vastaavasti kuulan tilavuus on $b_d r^d$, missä $b_d \in]0,\infty[$)).
Tapauksessa $d = 2$ todistus sujuisi napakoordinaattien ja tapauksessa $d = 3$ pallokoordinaatien avulla; yleinen todistus saadaan helposti [R:RCA:Exe8.6]:sta. Mm. paloittain jatkuvat funktiot ovat Borel-mitallisia. Jos tutkimasi funktio ei ole radiaalisymmetrinen (ts. $|x|$:n funktio), keksi sille sellainen majorantti tai minorantti tarpeittesi mukaan.
Tämän tehtävän tosin olisi voinut laskea ilmankin yo. lemmaa (vrt. 2^o).