**Mat-1.155 ODYjen teoria, 7. harjoitus ma 9.3.1998 klo 14–16, U325 (3 sivua)**

**Tehtävä 7.1** ([s. 71] *vaikeahko, pitkähkö*):
Merkitään $\mathcal{C}_v := \dot{\mathcal{C}} := \{u \in \mathcal{C} \mid \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0\}$. (Yleensä tästä käytetään merkintää $\mathcal{C}_0$, mutta Rauch varaa sen kompaktikantajaisten jatkuvien funktioiden joukolle $\mathcal{C}_c$.) Kirjassa on sanottu ilman todistusta, että jos $\mathcal{S}$ suljetaan $L^\infty$-normin suhteen, niin saadaan $\mathcal{C}_v$, ts. $\mathrm{cl}_{L^\infty}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}_v$. Todista tämä.

**Ratkaisu:** Joukon sulkeuma on sama kuin joukon jonosulkeuma[1], eli
**Lemma**: *Olkoon $X$ metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin $\bar{A} = \{x \in X \mid \exists \{x_n\} \subset A$ s.e. $x_n \to x\}$.*

Todistus: Selvästi tuollainen $x$ on joko $A$:n piste tai $A$:n kasautumispiste (ts. jokaisessa $B_\epsilon(x)$ on jokin $A$:n piste, peräti kaikki $\{x_n\}_{n \geq N_\epsilon}$). Toisaalta $x \in \bar{A} \implies \forall n\ \exists x_n \in B_{1/n}(x) \cap A$ (vrt. [R:PMA:2.18]) (muutoin olisi $\bar{A} \subset [B_{1/n}(x)]^c \subset_c X$), QED.

$1^o$ $\mathcal{C}_v$ on suljettu:
Olkoon $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_v$ ja $f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ (avaruudessa $L^\infty$ eli ess sup-normin suhteen). On siis osoitettava, että $f \in \mathcal{C}_v$.

Koska $\{f_n\}$ suppenee, se on Cauchy-jono ($\|f_n - f_m\|_\infty \to 0$, kun $m, n \to \infty$)[2]. Jatkuvalla funktiolla $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)|$, joten $\{f_n\}$ on Cauchy-jono myös $\mathcal{C}_b$:ssä, siis[3] $f_n \to g \in \mathcal{C}_b$. Niinpä $f = g$ (m.k., siis voidaan samaistaa nämä).[4]

Enää on osoitettava, että $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ eli $\forall \epsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R}_+$ s.e. $|x| > M \implies |f(x)| < \epsilon$.
Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Valitaan $n$ s.e. $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon/2$. Koska $f_n \in \mathcal{C}_v$, voidaan valita $M := M_{f_n,\epsilon/2} \in \mathbb{R}_+$ s.e. $|x| > M \implies |f_n(x)| < \epsilon/2$. Tästähän seuraa, että $|x| > M \implies |f(x)| = |f_n(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \epsilon/2 + \|f - f_n\|_\infty < \epsilon$, ts. näin valittu $M$ kelpaa funktiolle $f$ arvolla $\epsilon$, QED.

$2^o$ Koska $\mathcal{C}_v$ on suljettu ja $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_v$, välttämättä $\bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{C}_v$. Nyt on vielä osoitettava, että $\mathcal{C}_v \subset \bar{\mathcal{S}}$, ts. että $\mathcal{S}$ on tiheässä $\mathcal{C}_v$:ssä. Tämän teemme toteamalla ensin jokaisen $f \geq 0$ $\mathcal{S}$:n kasautumispisteeksi ja todistamalla tämän avulla saman muillekin $f$ (kun $f \in \mathcal{C}_v$). Tapa 1 on helppo, jos tuntee silottajat (näppärä tapa lähestyä jotain funktiota (melkein missä avaruudessa tahansa) sileillä funktioilla), tapa 2 ei ole vaikea mutta on tekninen ja työläs, eikä ehkä kovin opettavakaan.

Jos $f \in \mathcal{C}_v$, niin konstruoimme seuraavasti jonon $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ jolla $f_n \underset{L^\infty}{\to} f$:
**TAPA 1**: $f_n := J_n * f \overset{n\to\infty}{\underset{L^\infty}{\to}} f$ ja $J_n * f \in \mathcal{C}_v\ \forall n$ [Adams: "Sobolev Spaces", 2.18e], kun $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ on tietty $\mathcal{C}_c^\infty$-funktiojono ("mollifiers" eli silottajat) (ja $f \in \mathcal{C}_v$ on mielivaltainen), siis $\mathcal{S}$ on tiheässä $\mathcal{C}_v$:ssä.

**TAPA 2**: Oletetaan ensin, että $f \geq 0$ (ts. $f(x) \geq 0\ \forall x$).
Olkoon $\epsilon > 0$, valitaan $R$ s.e. $|x| \geq R \implies |f(x)| < \epsilon/2$.
Valitaan $N \in \mathbb{N}$ s.e. $N > \sup |f|$. Valitaan $n > 1/\epsilon$.
$V_k := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < R + 1 \wedge k/n < f(x)\}$ (avoin, koska kahden avoimen leikkaus),
$K_k := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq R \wedge (k+1)/n \leq f(x)\} = \bar{B}_R \cap f^{-1}[0, (k+1)/n] \subset_K$

---

[1] Extratietoa: Tämä pätee paitsi $\mathbb{R}^d$:ssä, myös muissa metrisissä avaruuksissa (samalla todistuksella) muttei kaikissa topologisissa avaruuksissa (ei esim. $L^2([0,1])$:n heikossa topologiassa [R:FA:Exe3.9], muistaakseni ei myöskään $\mathcal{D}'$:ssa eikä $\mathcal{S}'$:ssa, näistä en ole varma). Niinpä metrisissä avaruuksissa (ja muissakin $N_1$-avaruuksissa ja eräissä muissakin avaruuksissa) myös "jonotiheä" (*sequentially dense*) ja "tiheä" ovat synonyymejä, samoin "jatkuva" ja "jonojatkuva" [R:FA:p.360]. TKK:n kursseilla yleensä käytetään vain metrisiä avaruuksia ja eräät heikko-*-topologiat ovat ainoa poikkeus, niissä puolestaan ei yleensä tarvita topologiaa sinänsä vaan jonokäsitteitä, joten näitä seikkoja ei juuri tarvitse muistaa.

[2] Tässä $\|g\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |g(x)|$ on $L^\infty$-normi [R:RCA:Ch3 tai R:FA:Ch1].

[3] Koska jatkuvien rajoitettujen funktioiden avaruus $\mathcal{C}_b$ supremum-normilla on täydellinen [R:PMA:7.15], jono suppenee johonkin $g \in \mathcal{C}_b$.

[4] Selvästi $\mathcal{C}_v \subset \mathcal{C}_b$ (jos $f \in \mathcal{C}_v$, niin jonkin $M$-säteisen pallon $\bar{B}_M$ ulkopuolella $|f| < \epsilon := 1$; kompaktissa $\bar{B}_M$ $f$ on rajoitettu ($M' := \sup_{\bar{B}_M} |f| < \infty$) [R:PMA tai R:RCA] (kompaktin jatkuva kuva on kompakti), siis $\sup |f| \leq \min(1, M')$.

Tehtävässä on tähän mennessä todettu, että annettu $\mathcal{C}_v$-Cauchy-jono suppenee johonkin $g \in \mathcal{C}_b$ (koska $\mathcal{C}_b$ on täydellinen). Seuraavassa kappaleessa saadaan valmiiksi todistus siitä, että $g \in \mathcal{C}_v$, siis $\mathcal{C}_v$ on $\mathcal{C}_b$:n (siis myös $L^\infty$:n) suljettu aliavaruus, siis ne molemmat ovat Banach-avaruuksia (eli täydellisiä normiavaruuksia) kuten $L^\infty$:kin.

$V_k$ (kompakti)[5] $\qquad (k = 0, 1, ..., nN =: m)$.

Valitaan kullakin $k \le m$ funktio $\phi_k \in \mathcal{C}_c^\infty$ s.e. $\phi_k|_{K_k} = 1 \wedge \phi_k|_{V_k} = 0 \wedge 0 \le \phi_k \le 1$ (vrt. [Rauch:Prop2.3.2] tai [R:RCA:Th2.20]). $g(x) := \sum_{j=1}^m \frac{1}{n}\phi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Jos $|x| \le R \wedge k/n \le f(x) < (k+1)/n$, niin $x \in K_j \ \forall j \le k-1$,
joten $g(x) \ge \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n} 1 = k/n$, ja $x \notin V_j \ \forall j > k$,
joten $g(x) \le \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{n} = (k+1)/n$.
Siis $k/n \le g(x) < (k+1)/n$, joten $|f(x) - g(x)| < 1/n < \epsilon$, kuten haluttiin (jos taas $|x| > R$, niin $|f(x) - g(x)| = |f(x)| < \epsilon/2 < \epsilon$, koska $R$ valittiin siten).

Olkoon sitten $f \in \mathcal{C}_v(\mathbb{R}^d)$ mielivaltainen. Tällöin $f = \operatorname{Re} f + \operatorname{Im} f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$, missä $f_j \in \mathcal{C}_v(\mathbb{R}^d) \wedge f_j \ge 0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ [R:RCA:1.14]. Valitaan funktiot $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{C}_c^\infty$ kuten yllä. Jos $\|f_j - g_j\|_\infty < \epsilon/4 \ \forall j$ ja $g := g_1 - g_2 + ig_3 - ig_4$, niin $|f(x) - g(x)| = |[f_1(x) - f_2(x) + if_3(x) - if_4(x)] - [g_1(x) - g_2(x) + ig_3(x) - ig_4(x)]| \le |f_1(x) - g_1(x)| + |f_2(x) - g_2(x)| + |f_3(x) - g_3(x)| + |f_4(x) - g_4(x)| < \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon$.

Siis peräti $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on tiheässä $\mathcal{C}_v(\mathbb{R}^d)$:ssä, erityisesti sen ylijoukko[6] $\mathcal{S}$ on tiheässä (siis jokainen $f \in \mathcal{C}_v(\mathbb{R}^d)$ on kummankin kasautumispiste), QED.

**Tehtävä 7.2** ([s. 73] *vaikeahko, keskipitkä*):
Konvoluutio $(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$ toteuttaa $\|f*g\|_p \le \|f\|_1\|g\|_p$ $(1 \le p \le \infty)$ ja $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_p\|g\|_q$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1 \wedge p, q \in [1, \infty])$.[7]
Osoita interpolaatiolla [Rauch:Th2.3.5], että $\|f*g\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q$
(kun $p, q \in [1, \infty] \wedge r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1 \ge 0$).

**Vastaus:** (Huom.: $\|f\|_p^p := \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p$ $(p < \infty)$; $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f|$.)
Olkoon $q \in [1, \infty]$ ja $g \in L^q$. $t := (1 - q^{-1})^{-1} = q/(q-1)$, $B_0 := \|g\|_q =: B_1$, $Kf := f * g$.
Tällöin $\|Kf\|_q \le \|f\|_1\|g\|_q = B_0\|f\|_1$ ja $\|Kf\|_\infty \le \|f\|_t\|g\|_q = B_1\|f\|_t$.

[5]Koska rajoitettu ja suljettu (suljetun alkukuva jatkuvalla funktiolla on suljettu, samoin suljettujen joukkojen leikkaus [R:PMA]&[R:RCA]).

[6]Siis $\overline{\mathcal{C}_c^\infty} = \mathcal{C}_v$, joten $\bar{A} = \mathcal{C}_v$ aina kun $\mathcal{C}_c^\infty \subset A \subset \mathcal{C}_v$, mm. kun $A = \mathcal{C}_c$, $A = \mathcal{C}_v^k$ tai $A = \mathcal{S}$.

[7]Nämä on todistettu mm. kirjassa [Cotlar-Cignoli] (TKK:n mat. kirjasto), ed. tod. ei ole kovin vaikea, jälkimmäinen tulee suoraan Hölderin epäyhtälöstä [R:RCA:Exe9.8].

Niinpä Rieszin–Thorinin lauseen [Rauch:2.3.5][8] (huom. painovirheet) perusteella

$$\|Kf\|_{s_\theta} \le B_1^\theta B_0^{1-\theta}\|f\|_{r_\theta} = \|g\|_q^\theta\|g\|_q^{1-\theta}\|f\|_{r_\theta} = \|g\|_q\|f\|_{r_\theta},$$

kun $0 \le \theta \le 1$, $r_0 = 1$, $s_0 = q$, $r_1 = t$, $s_1 = \infty$ ja $\frac{1}{r^\theta} = \theta\frac{1}{r_1} + (1-\theta)\frac{1}{r_0} = \theta(1 - \frac{1}{q}) + (1 - \theta) = 1 - \theta/q$ (eli (merk. $p := r^\theta$) $\theta = (1 - p^{-1})q$ (*)) sekä $\frac{1}{s^\theta} = \theta\frac{1}{s_1} + (1-\theta)\frac{1}{s_0} = (1-\theta)/q \overset{*}{=} q^{-1} - (1 - p^{-1}) = q^{-1} + p^{-1} - 1$.
Tässä on siis oltava $1 \ge \theta = (1 - p^{-1})q$ eli $1 - p^{-1} \le q^{-1}$
eli $0 \le q^{-1} - p^{-1} - 1 = \frac{1}{s^\theta} =: r^{-1}$, jotta olisi $\theta \in [0, 1]$ (ja $p, q \in [1, \infty]$)[9]
Tällöin siis $\|f * g\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q$, QED.
(Huom.[10] $f * g = g * f$.)

**Tehtävä 7.3** ([s. 88] *vaikeahko, pitkähkö, tärkeähkö*):
Päteekö $\delta_h T \underset{\mathcal{S}'}{\rightarrow} T'$, kun $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ja $\delta_h := \frac{1}{h}(\tau_{-h} - I)$?[11]

**Vastaus:** $1^o$ $\delta_h\phi \overset{h\to 0}{\underset{\mathcal{S}}{\rightarrow}} \phi'$ $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (todistetaan alempana).
$2^o$ Varsinainen todistus $(T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$:

$$\langle \delta_h T, \phi\rangle := \langle \frac{1}{h}(\tau_{-h}T - T), \phi\rangle = \frac{1}{h}\langle(\tau_{-h}T - T), \phi\rangle := \frac{1}{h}[\langle\tau_{-h}T, \phi\rangle - \langle T, \phi\rangle]$$

$$= \frac{1}{h}[\langle T, \tau_h\phi\rangle - \langle T, \phi\rangle] = -\frac{1}{-h}[\langle T, \tau_{-(-h)}\phi - \phi\rangle] =: -\langle T, \delta_{-h}\phi\rangle \to -\langle T, \phi'\rangle$$

[8]Sen mukaan $K \in \mathcal{L}(L^{r_0}, L^{s_0}) \cap \mathcal{L}(L^{r_1}, L^{s_1}) \implies K \in \mathcal{L}(L^{r_\theta}, L^{s_\theta})$ normilla $B_\theta = B_1^\theta B_0^{1-\theta}$.
Eksaktimmin: Jos $K_0 \in \mathcal{L}(L^{r_0}, L^{s_0}) \wedge K_1 \in \mathcal{L}(L^{r_1}, L^{s_1}) \wedge K_0|_{\mathcal{D}} = K_1|_{\mathcal{D}}$ (tätä tarkoitetaan sillä, että nämä kuvaukset ovat samat; tästä voidaan johtaa, että $K_0 f = K_1 f \ \forall f \in L^{r_0} \cap L^{r_1}$ (esim. otetaan $\{f_n\} \subset \mathcal{D}$ s.e. $f_n \to f$ molemmissa (tämä on mahd.), tällöin $K_0 f = K_1 f$ on Cauchy molemmissa ja raja-arvon on oltava sama (m.k.), koska se on osajonon pisteittäinen raja-arvo m.k. [R:RCA:3.12]), joten kuvausten samaistaminen on järkevää), niin $\exists! K_2 \in \mathcal{L}(L^{r_\theta}, L^{s_\theta})$ s.e. $K_2|_{\mathcal{D}} = K_0|_{\mathcal{D}} = K_1|_{\mathcal{D}}$, lisäksi $K_2$:n normi on enintään $B_\theta = B_1^\theta B_0^{1-\theta}$.

[9]Siis jos $p$ on liian pieni $(p^{-1} > q^{-1} - 1)$, ei ole sellaista $\theta \in [0, 1]$, että $p = r_\theta$.

[10]Sijoittamalla $z := x - y$ saadaan $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-z)\,dz = (g*f)(x)$ [R:RCA:7.26] (jos laitat $-1$:n $dz$:n eteen, joudut kääntämään integraalin rajat ylösalaisin [R:RCA:7.26(15)]; nämähän kumoavat toisensa).

[11]Kyllä, ja vastaava pätee myös $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$:ssä ja $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:ssä (ja $\mathcal{C}_v^k$:ssä ja $(\mathcal{C}_v^k)^*$:ssä $(k \ge 1)$ ym.); todistukset ovat samanlaisia kuin alla.

(=: $\langle T', \phi\rangle$), koska $\delta_{-h}\phi \to \phi'$ [1$^o$], kun $-h \to 0$ (eli $h \to 0$), QED.[12]

**1$^o$** Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\delta_h f \underset{\mathcal{S}}{\to} f'$ tarkoittaa, että $\|\delta_h f - f'\|_{\alpha,\beta} \to 0\ \forall \alpha, \beta$. Todistetaan tämä: Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, koitetaan löytää $\delta > 0$ s.e. seuraava saadaan epsilonin alle kun $|h| < \delta$:

$$\|\delta_h f - f'\|_{\alpha,\beta} = \|\frac{1}{h}(\tau_{-h} f - f) - f'\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha \partial^\beta [\frac{1}{h}(\tau_{-h} f - f) - f']\|_\infty$$

$$= \|x^\alpha [\frac{1}{h}(\tau_{-h} f^{(\beta)} - f^{(\beta)}) - f^{(\beta+1)}]\|_\infty$$

$$:= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha [\frac{1}{h}(f^{(\beta)}(x+h) - f^{(\beta)}(x)) - f^{(\beta+1)}(x)]|$$

ja väliarvolauseen perusteella mielivaltaisilla $g \in \mathcal{C}^1$, $x, h \in \mathbb{R}$ pätee: $\frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)) = g'(x + q_{x,h})$ jollain $q_{x,h} \in ]0, h[$, joten (sij. $g := f^{(\beta)}$)

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha [f^{(\beta+1)}(x + q_{x,h}) - f^{(\beta+1)}(x)]|$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} |[x^\alpha f^{(\beta+1)}](x + q_{x,h}) - [x^\alpha f^{(\beta+1)}](x)]| \le \epsilon/2 < \epsilon,$$

kun $|h| < \delta_{F,\epsilon}$, missä $F := x^\alpha f^{(\beta+1)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ [laskuharjoituksen 5.4 lemma] ja[13], $|x - y| < \delta_{F,\epsilon} \implies |F(x) - F(y)| < \epsilon$, koska tällöin $|q_{x,h}| < |h| < \epsilon_{F,\epsilon}$, QED.

Kuten edellä todettiin, äärettömyydessä häviävät funktiot ovat tasaisesti jatkuvia:

**Lemma** *Jos $F \in \mathcal{C}_v(\mathbb{R}^d)$, niin $F \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R}^d)$.*

**Tod.** Olkoon $\epsilon > 0$, meidän on löydettävä $\delta > 0$ s.e. $|x - y| < \delta_{F,\epsilon} \implies |F(x) - F(y)| < \epsilon$.

Valitaan $R > 1$ s.e. $|x| > R - 1 \implies |F(x)| < \epsilon/5$. Jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa [R:PMA], joten voidaan valita $\delta' > 0$ s.e. $x, y \in \bar{B}_R := \{z \,|\, |z| \le R\} \wedge |x - y| < \delta' \implies |F(x) - F(y)| < \epsilon$. $\delta := \min(1, \delta')$. Jos nyt $|x - y| < \delta$, niin $|F(x) - F(y)| < \epsilon$, koska
(i) Jos $x, y \in \bar{B}_R$, niin homma on selvä $\delta'$:n perusteella.
(ii) Ellei, niin kumpikaan ei ole $\bar{B}_{R-1}$:ssä (jos toinen olisi, niin toinenkin olisi $\bar{B}_R$:ssä, koska $|x-y| < \delta \le 1$), ja niinpä $|F(y) - F(x)| \le |F(y)| + |-F(x)| < \epsilon/5 + \epsilon/5 < \epsilon$, QED.

**Tehtävä 7.4** ([s.251] *helppo, lyhyt*):
Olkoon $f = \chi_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}$ eli $f(x, y) = 1$, kun $x, y > 0$,[14] ja $f = 0$ muualla. Määrää distribuutioderivaatta $\partial_y f$.

**Ratkaisu:** Nyt siis $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Kun $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\langle \partial_y f, \phi\rangle \overset{s.251}{:=} -\langle f, \partial_y \phi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} f\phi_y = -\int_0^\infty \int_0^\infty \phi_y(x, y)\, dy\, dx = -\int_0^\infty \left[\Big|_0^\infty \phi(x, y)\right] dx = -\int_0^\infty [0 - \phi(x, 0)]\, dx = \int_0^\infty \phi(x, 0)\, dx$. (Siis $\partial_y f$ on kuvaus $\partial_y f : \mathcal{D} \ni \phi \mapsto \int_0^\infty \phi(x, 0)\, dx \in \mathbb{C}$.)

---

[12] Muistathan, että $\psi_n \underset{\mathcal{S}}{\to} \psi \implies \langle T, \psi_n\rangle \to \langle T, \psi\rangle$ (tätähän $T$:n jatkuvuus heikko*-topologiassa tarkoittaa). Siis $\langle T, \delta_{-h_n}\phi\rangle \to \langle T, \phi'\rangle$, kun $h_n \to 0$, koska tällöinhän $\delta_{-h_n}\phi \to \phi'$ [1$^o$]. Koska tämä pätee aina kun $h_n \to 0$, on $\langle T, \delta_{-h}\phi\rangle \to \langle T, \phi'\rangle$ kun $h \to 0$ [R:PMA:4.2].

[13] Ao. lemman perusteella tällainen $\delta$ on olemassa, koska $F \in \mathcal{S} \subset \mathcal{C}_v \subset \mathcal{C}_u$.

[14] $\ge$ ja $>$ ovat tässä samanarvoisia, koska $L^1_{\text{loc}}$-funktion määräämä distribuutio ei riipu sen arvosta nollamitallisessa joukossa (koska ei vaikuta integraaliin $\int \phi f$).