Mat-1.155 ODYjen teoria, 5. harjoitus ma 23.2.1998 klo 14–16, U325 (4 sivua)

4. laskuharjoituksissa olin tulkinnut $\inf_*$-merkinnän väärin, siksi 4.1 oli vajaa ja 4.2:n todistus turhan vaikea. Korjatut versiot mallivastauksista ovat U331:n kirjekuoressa kuten muutkin mallivastaukset.

Nyt on loppukurssiksi siirrytty kirjaan [Rauch]:=Jeffrey Rauch: "Partial Differential Equations" (ja nyt funktiot ovat $\mathbb{C}$-arvoisia, ellei toisin mainita (joskus $\mathbb{C}^d$- tai $\mathbb{R}^d$-arvoisia)). Loppukurssi on klassisempaa teoriaa ja lähempänä funktionaalianalyysiä (vrt. [R3]); tähänastinen (v. 1983 keksitty) viskositeettiratkaisuteoria oli enemmänkin "hard analysis". Historiallisista syistä [R1]:=[R:PMA], [R2]:=[R:RCA] ja [R3]:=[R:FA] (Rudinin kolme oppikirjaa). Muista, että kurssin osat voi suorittaa myös erikseen. Laskuharjoitusaktiivisuus on ollut vähäistä, mutta jokainen voi silti suorittaa kurssin (hyvällä tenttituloksella).

Tehtävä 5.3 on helpoin ja silti tärkeä. Laske ainakin se.

Tiivistelmä teoriasta: nopeasti vaimenevien funktioiden avaruudessa

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}$$

määritellään metriikka ρ, mistä seuraa (yksityiskohdat eivät ole tärkeitä), että jono $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ suppenee funktioon $f \in \mathcal{S}$ joss $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \to 0$ $(n \to \infty)$ $\forall \alpha, \beta$. Niinpä sinun ei tarvitse ymmärtää metriikkaa ρ, muista vain suppenemiskäsite. Näin määritelty metrinen avaruus on täydellinen [teht1.2].

Fourier-muunnos $(\mathcal{F}u)(\xi) := \gamma \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-ix\xi}\, dx$ $(\gamma := (2\pi)^{-d/2})$ määritellään $\forall u \in L^1$. Jos $u \in \mathcal{S}$, niin $\mathcal{R}\mathcal{F}\mathcal{F}u = u$ [Rauch:2.2.4], joten muuntamalla uudelleen ja peilaamalla saadaan $\mathcal{F}u$:sta u. $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ (se on siis jatkuva ja lineaarinen $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$) [Rauch:2.2.1].

$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^d)$, kun $1 \le p < \infty$. Toisaalta $\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{S}$, joten myös $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on tiheä. Jos $\mathcal{S}$:ää ajatellaan L^2:n aliavaruutena (siis käytetään $\|\cdot\|_2$-normia), $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to L^2$ on jatkuva ($\|\mathcal{F}\phi\|_2 = \|\phi\|_2$), joten se laajenee lineaarikuvaukseksi $L^2 \to L^2$, joka sattuu vielä säilyttämään normin [Rauch:2.3.4].

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))^* := \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \mathbb{C})$ on jatkuvien lineaarikuvausten $\mathcal{S} \to \mathbb{C}$ vektoriavaruus ($\mathcal{S}$:n duaali). Banach-avaruuksien duaalit varustetaan operaattorinormilla, mutta $\mathcal{S}$ ei ole Banach-avaruus, joten käytämme $\mathcal{S}'$:ssä "heikko*-topologiaa" (lausutaan "heikko-tähti-topologia" tai "weak-star-topology"). Sen yksityiskohdat kerrotaan [R3:3.14]:ssä (Rudin: "Functional Analysis"), mutta sinun ei tarvitse tietää siitä mitään muuta kuin että $T_n \to T$ avaruudessa $\mathcal{S}'$ joss $T_n(\phi) \to T(\phi)$ $\forall \phi \in \mathcal{S}$ [Rauch:s.75].

Jos $T \in \mathcal{S}'$, niin $\mathcal{F}T$ määritellään $(\mathcal{F}T)(\phi) := T(\mathcal{F}\phi)$ $\forall \phi \in \mathcal{S}$, vastaavasti $(\partial^\alpha T)(\phi) := T((-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \phi)$ (esim. $T'(\phi) := T(-\phi') = -T(\phi')$, kun $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$) jne. [Rauch:2.4.4]. [Rauch]:ssa todistetaan, että näin määritelty $\mathcal{F}$ on lineaarinen ja jatkuva $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ (ts. $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}')$); samoin $\partial^\alpha, \tau_h, \sigma_k, M \in \mathcal{L}(\mathcal{S}')$ [Rauch:2.4.5][1]; sinun ei tarvitse ymmärtää todistuksia.

Kaikki L^p-funktiot (erityisesti $\mathcal{S}$), mitat yms. voidaan samaistaa $\mathcal{S}'$:n alkioiksi [Rauch:s.75]; muitakin on. Jos $f \in L^p$, voidaan kuvausta $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f\phi$ merkitä T_f:llä. Jos haluat ylimääräistä harjoitusta, voit todistaa, että tällöin $T_{\tau_h f} = \tau_h T_f \wedge T_{\sigma_k f} = \sigma_k T_f$. Jos $f \in L^1$, (tai L^2) niin $T_{\mathcal{F}f} = \mathcal{F}T_f$ jne., joten em. määritelmät ovat järkeviä ja luonnollisia (ja muutenkin on tapana määritellä $\mathcal{S}'$:n alkioille eli vaimennetuille distribuutioille (*tempered distributions*) (huom.: $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$) vain sellaisia funktio-operaatioita, jotka antavat "saman" tuloksen kuin vastaaviin (L^1-)funktioihin sovellettuna, koska T_f ja f on tapana samaistaa).

Tehtävä 5.1 ([Rauch:s. 62] *Mekaanista laskeskelua, keskipitkä, ei tärkeä*): Todista, että ρ on metriikka avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, kun

$$\rho(g, f) := \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{\|g - f\|_{\alpha,\beta}}{1 + \|g - f\|_{\alpha,\beta}}.$$

Ratkaisu: Laskuharjoituksissa $D := \partial := \frac{d}{dx}$ toisin kuin monissa kirjoissa.

Huom.: yleensä et tarvitse metriikkaa ρ, sillä (kuten pienellä laskulla nähdään) $f_n \to f$ joss $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \to 0$ $\forall \alpha, \beta$, mikä on yleensä paljon helpompi tarkistaa!

$(1 - x)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty x^k$ (kun $|x| < 1$), mistä saadaan induktiolla[2] (1 −

[1]Oikeastaan niitä ei todisteta jatkuviksi vaan jonojatkuviksi, ts. $T_n \to T \implies \tau_h T_n \to \tau_h T$ jne. (metrisissä avaruuksissa jatkuvuus ja jonojatkuvuus (sekä tiheys ja jonotiheys sekä sulkeuma ja jonosulkeuma) ovat synonyymejä, mutta $\mathcal{S}'$ ei ole metrinen, joten todistus vaatisi heikko*-topologian tuntemista, onneksi jonojatkuvuus riittää tällä kurssilla).

[2]Näissä alaviitteissä on lähinnä vain toisarvoisia asioita, voit sivuuttaa. Potenssisarjaa voi derivoida termeittäin, joten $\frac{d}{dx}(1 - x)^{-m} = -m(1 - x)^{-m-1}(-1) =$

$x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} x^k$.

Niinpä $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} 2^{-k} = (1-\frac{1}{2})^{-m} = 2^m \qquad (*)$.

Alla törmäämme kysymykseen: montako multinomia $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on tietyllä $|\alpha|$:n arvolla n?

Esim. $|\alpha| = 5$, $d = 3$: $(5,0,0)$, $(4,1,0)$, $(4,0,1)$, $(3,2,0)$ ..., 21 kpl. Voimme tässä merkitä viisi pistettä jonoon ja laittaa yhteensä kaksi pilkkua samaan jonoon, jolloin pisteet jakautuvat kolmeen karsinaan. Tällaisia symbolijonoja on $\binom{7}{5} = 21$ kpl (koska seitsemän symbolin jonosta viiden pisteen paikat voi valita $\binom{7}{5}$ eri tavalla). Yleisesti[3]

$$|\{\alpha \in \mathbb{N}^d \mid |\alpha| = n\}| = \binom{n+(d-1)}{n}. \qquad (**)$$

Sitten todistetaan suppeneminen: $\rho(g,f) < \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|-|\beta|} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}\sum_{\beta\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|-|\beta|}$
$= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|}\sum_{\beta\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\beta|} = (\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|})(\sum_{\beta\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\beta|}) = (\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} 2^{-|\alpha|})^2$
$= (\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\ |\alpha|=n} 2^{-|\alpha|})^2 = (\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\ |\alpha|=n} 1)^2$
$\overset{**}{=} (\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\binom{n+(d-1)}{n})^2 \overset{*}{=} (2^d)^2 = 4^d$.

Siis ρ on $[0,4^d[$-arvoinen funktio, osoitetaan vielä, että se täyttää metriikan kolme aksioomaa ($\forall f,g\in\mathcal{S}$).

$m(1-x)^{-m-1}$, joten $(1-x)^{-m-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\binom{m+k-1}{k}x^k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m+k-1}{k}kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{(m+k-1)\ldots(m+1-1)}{k!}kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(m+k-1)\ldots(m+1)}{(k-1)!}x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)\ldots(m+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}x^n$, QED.

[3]Pilkkujahan tarvitaan $d-1$ kpl, joten symboleja on yhteensä $n+d-1$ kpl. Selvästihän jokainen $d-1$ pilkun ja n pisteen jono kuvaa jotakin (eri) multinomia ja jokainen multinomi on esitettävissä tällaisena jonona (bijektio: multinomit$\to$jonot).

1^o $\rho(f,g) = 0 \iff f = g$, koska selvästi $\rho(f,f) = 0$ ja toisaalta $\rho(f,g) = 0 \implies \frac{\|g-f\|_{\alpha,\beta}}{1+\|g-f\|_{\alpha,\beta}} = 0\ \forall\alpha,\beta \implies \|g-f\|_{\alpha,\beta} = 0\ \forall\alpha,\beta \implies 0 = \|g-f\|_{0,0} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|(g-f)(x)| \implies 0 = |(g-f)(x)| = |g(x)-f(x)|\ \forall x \implies g(x) = f(x)\ \forall x \implies g = f$.

2^o Selvästi $\rho(f,g) = \rho(g,f)$.

3^o $\frac{c}{1+c} \le \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$, kun[4] $c \le a+b$ (ja $a,b,c \ge 0$).

Niinpä $\rho(f,h) \le \rho(f,g) + \rho(g,h)$, koska vasemman puolen sarjan termit ovat enintään oikean puolen sarjojen termien suuruisia.[5]

Siis ρ on metriikka joukossa $\mathcal{S}$.

Tehtävä 5.2 (*vaikeahko, keskipitkä, ei kovin tärkeä*):
Osoita, että $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on täydellinen metrinen avaruus.

Ratkaisu: Olkoon $\Omega \overset{o}{\subset} \mathbb{R}^d$ (ts. olkoon Ω avoin $\mathbb{R}^d$:n osajoukko). Olkoon $\mathcal{C}_b(\Omega)$ rajoitettujen jatkuvien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ joukko sup-normilla. $\mathcal{C}_b(\Omega)$ on Banach-avaruus [R1:7.15][6].

Lemma: Olkoon $\epsilon > 0$. Voidaan valita $N \in \mathbb{N}$ ja $\delta > 0$ s.e. jos $f,g\in\mathcal{S}$ ja $\|f-g\|_{\alpha,\beta} < \delta$ niillä α,β joilla $|\alpha| \le N \wedge |\beta| \le N$, niin $\rho(f,g) < \epsilon$.

Todistus: Olkoon N s.e. $\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d,\ |\alpha|>N\vee|\beta|>N} 2^{-|\alpha|-|\beta|} < \epsilon/2$ (tällainen on olemassa, koska sarja suppenee). Olkoon $\delta := (\epsilon/3)/4^d$. Jos f,g ovat kuten lemmassa, $\rho(f,g) \le \sum_{|\alpha|>N\vee|\beta|>N} + \sum_{|\alpha|,|\beta|\le N} < \epsilon/2 + \sum_{|\alpha|,|\beta|\le N} 2^{-|\alpha|-|\beta|}\delta < \epsilon/2 + \delta\cdot\sum_{\alpha,\beta}2^{-|\alpha|-|\beta|} = \epsilon/2 + [(\epsilon/3)/4^d]\cdot 4^d = \epsilon/2+\epsilon/3 < \epsilon$, QED

Korollaari: $f_n \to f$ joss $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta}\to 0\ \forall\alpha,\beta$. Jono $\{f_n\}$ on Cauchy-jono joss $\forall\delta>0\ \forall\alpha,\beta\ \exists M$ s.e. $n,m\ge M \implies \|f_n-f_m\|_{\alpha,\beta} < \delta$ (ts. joss "$\|f_n-f_m\|_{\alpha,\beta}\to 0\ \forall\alpha,\beta$, kun $m,n\to\infty$").

Tod.: Seuraa suoraan lemmasta, QED.

---

[4] $\iff c(1+a)(1+b) \le a(1+b)(1+c) + b(1+a)(1+c) \iff c \le a+b+ab+abc$.

[5]koska $\|f-h\|_{\alpha,\beta} := \sup_x|x^\alpha D^\beta(f-h)(x)| = \sup_x|(x^\alpha D^\beta f - x^\alpha D^\beta h)(x)| = \sup_x|x^\alpha D^\beta f(x) - x^\alpha D^\beta h(x)| \le \sup_x + \left[|x^\alpha D^\beta f(x) - x^\alpha D^\beta g(x)| + |x^\alpha D^\beta g(x) - x^\alpha D^\beta h(x)|\right] \le \sup_x|x^\alpha D^\beta f(x) - x^\alpha D^\beta g(x)| + \sup_x|x^\alpha D^\beta g(x) - x^\alpha D^\beta h(x)| =: \|f-g\|_{\alpha,\beta} + \|g-h\|_{\alpha,\beta}$; tämän tosin saisi siitäkin, että kyseessä on seminormi, joten $\|(f-g)+(g-h)\|_{\alpha,\beta} \le \|f-g\|_{\alpha,\beta} + \|g-h\|_{\alpha,\beta}$.

[6][R1] eli "Rudin 1" tarkoittaa Modernin analyysin perusteiden oppikirjaa Walter Rudin: "Principles of Modern Analysis" (ja 7.15 sen kohtaa 7.15).

Siis emme yleensä tarvitse em. hankalaa metriikkaa, vaan voimme tutkia kutakin seminormia erikseen.[7]

Todistetaan, että $\mathcal{S}$ on täydellinen, ts. jokainen sen Cauchy-jono suppenee:

Olkoon $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ Cauchy-jono. Tällöin se on Cauchy-jono myös $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$:ssä (koska $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{C}_b} := \sup_x |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\|_{0,0} \to 0$, kun $m, n \to \infty$), joten $f_n \to f$ jollain $f \in \mathcal{C}_b$ (koska $\mathcal{C}_b$ on täydellinen [R1:7.15]).

Samoin $\|x^\alpha D^\beta f_n - x^\alpha D^\beta f_m\|_{\mathcal{C}_b} = \|f_n - f_m\|_{\alpha,\beta} \to 0$, joten on olemassa $f_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}_b$ s.e. $x^\alpha D^\beta f_n \to f_{\alpha,\beta}$. (+)

(Olkoon $\beta = (1, 0, 0, ..., 0)$.) Siis $f_n \to f$ ja $\frac{d}{dx_1} f_n = D^\beta f_n \to D^\beta f = f_{0,\beta}$ tasaisesti (erotuksen sup menee nollaan), joten lauseen [R1:7.17] perusteella $\exists \frac{d}{dx_1} f = f_{0,\beta}$. Induktiolla nähdään, että f:llä on kaikki derivaatat (ts. $f \in \mathcal{C}^\infty$) ja $D^\beta f = f_{0,\beta}\ \forall \beta \in \mathbb{N}^d$.

$f_{\alpha,\beta} := \lim_n x^\alpha D^\beta f_n = x^\alpha \lim_n D^\beta f_n = x^\alpha f_{0,\beta} = x^\alpha D^\beta f\ \forall \alpha, \beta$, joten $x^\alpha D^\beta f$ on rajoitettu jatkuva funktio $\forall \alpha, \beta$ (koska $f_{\alpha,\beta}$ on), siis $f \in \mathcal{S}$. Lisäksi $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha D^\beta f_n - x^\alpha D^\beta f\|_{0,0} = \|x^\alpha D^\beta f_n - f_{\alpha,\beta}\|_{0,0} \to 0\ \forall \alpha, \beta$ [(+)], joten [Korollaari] $f_n \to f$ avaruudessa $\mathcal{S}$ (ts. $\rho(f_n, f) \to 0$).

Siis mielivaltainen Cauchy-jono $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ suppenee johonkin $f \in \mathcal{S}$, joten $\mathcal{S}$ on täydellinen metrinen avaruus, QED. [8]

Tehtävä 5.3 (*helppo, lyhyehkö, tärkeä*):
Olkoon $u(x) := e^{-x}\chi_{\mathbb{R}_+}(x),\ x \in \mathbb{R}^1$. Laske seuraavien funktioiden Fourier-muunnokset: (a) $u(x)$, (b) $\tau_h u(x)$, (c) $e^{ixh}u(x)$, (d) $\sin(x)\, u(x)$.

Ratkaisu: Merkitään koko kurssin ajaksi $\hat{u} := \mathcal{F}u$, $\gamma := (2\pi)^{-d/2}$ ja $x\xi := (x, \xi) := \sum_{k=1}^d x_k \xi_k$ $(x, \xi \in \mathbb{R}^d)$, niin säästetään kirjoitusvaivaa. Siis
(a) (nyt $d = 1$)

$$\hat{u}(\xi) := \gamma \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-ix\xi}\, dx$$

$= \gamma \int_{-\infty}^\infty u(x) e^{-ix\xi}\, dx = \gamma \int_0^\infty e^{-x} e^{-ix\xi}\, dx = \gamma \int_0^\infty e^{-x(1+i\xi)}\, dx = \gamma \Big|_0^\infty \frac{e^{-x(1+i\xi)}}{-(1+i\xi)} = \gamma[0 - \frac{e^{-0(1+i\xi)}}{-(1+i\xi)}] = \gamma \frac{1}{1+i\xi}$. Siis $\hat{u}(\xi) = \gamma \frac{1}{1+i\xi}$.

Tämä integraalin avulla muuntaminen on siis määritelty kaikille L^1-funktioille [Rauch: 2.3.3], ja tämän tehtävän funktiot ovat L^1-funktioita (u on mitallinen ja $\|u\|_1 < \infty$, vast. b&c&d):
$\|u\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |u| = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$. Vastaavasti (sij. $y := x - h$) $\|\tau_h u\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |\tau_h u(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x-h)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |u(y)|\, dy = \|u\|_1 = 1$, $\|e^{ixh}u\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |e^{ixh}u(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |e^{ixh}||u(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot |u(x)|\, dx = 1$ ja $\|(\sin x)u\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |\sin x\, u(x)|\, dx \le \int_{\mathbb{R}} |u(x)|\, dx = 1$ (lisäksi tehtävän funktiot ovat mitallisia, kuten kaikki muutkin paloittain jatkuvat funktiot).[9]

(b) $\mathcal{F}(\tau_h u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} (\tau_h u)(x) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x-h) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-i(t+h)\xi}\, dt = \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-ih\xi} e^{-it\xi}\, dt = e^{-ih\xi}\hat{u}(\xi)$ (kuten [Rauch: 2.2.2]:ssa).

(c) $\mathcal{F}(e^{ixh}u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{ixh} u(x) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix(\xi - h)}\, dx = \hat{u}(\xi - h) = \tau_h \hat{u}(\xi) \overset{(a)}{=} \gamma \frac{1}{1+i(\xi-h)}$.

(d) Tapa 1: $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, joten $\mathcal{F}(u \sin x)(\xi) = \frac{1}{2i}[(\mathcal{F}(e^{ix}u(x)) - \mathcal{F}(e^{-ix}u(x))] \overset{(c)}{=} \frac{1}{2i}[\frac{\gamma}{1+i(\xi-1)} - \frac{\gamma}{1+i(\xi+1)}] = \frac{\gamma}{2-\xi^2+2i\xi}$.

Tapa 2: Kaavan [Rauch: 2.5(6)] ja tiedon $\mathcal{F}^* = \mathcal{R}\mathcal{F}$ perusteella (ja vähän jatkuvuuksien ja $\mathcal{C}_c^\infty$:n tiheyden perustella yleistämällä (yksityiskohdat sivuutetaan)) $\mathcal{F}(fu) = \mathcal{F}(\mathcal{F}[\gamma \hat{f} * \hat{u}]) = \gamma \mathcal{R}[\hat{f} * \hat{u}]$, mistä voisi laskea saman.

Tehtävä 5.4 ([s. 64] *keskitasoa, pitkähkö, aika tärkeä*):

[7] Sama pätee muissakin Fréchet-avaruuksissa, esim. äärettömän monta kertaa derivoituvien funktioiden avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, missä $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on avoin (siellä käytetään $\|f\|_{0,\beta}$-seminormeja).

[8] Samaan tapaan nähtäisiin, että $\mathcal{C}_b^\infty(\Omega)$ ja $\mathcal{C}_b^n(\Omega)$ ovat täydellisiä (jälkimmäiset peräti Banach-avaruuksia, kunkin normi saadaan esim. summaamalla kaikki seminormit (niitähän on vain äärellinen määrä)); tässä $\mathcal{C}_b^n(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}_b(\Omega) \,|\, D^\alpha f \in \mathcal{C}_b(\Omega) \in \mathcal{C}_b(\Omega)\ \forall |\alpha| \le n\}$ on n kertaa jatkuvasti ja rajoitetusti derivoituvien funktioiden avaruus. Vastaavasti myös $\mathcal{C}^n(\Omega)$ ja $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ovat täydellisiä metrisiä avaruuksia (nekin ovat Fréchet-avaruuksia), seminormeilla $\|f\|_{K_n,\beta} := \sup_{x \in K_n} |D^\beta f(x)|$, missä voidaan valita $K_n := \{x \in \mathbb{R}^d \,\big|\, |x| \le n\}$, kun $\Omega = \mathbb{R}^d$ (onhan jatkuva funktio aina rajoitettu kompaktissa K_n); muilla Ω joudutaan valitsemaan hankalampia K_n, esim. $K_n := \{x \in \Omega \,\big|\, |x| \le n \wedge d(x, \Omega^c) \ge 1/n\}$.
Huom.: Avaruuksien L^p_{loc} topologiat muodostetaan suunnilleen samaan tapaan.
Älä mieti näitä nyt pidempään, et tarvinne niitä tässä kurssissa!

[9] Muut L^p-funktiot kuin L^1-funktiot ja ylipäänsä muut $\mathcal{S}'$:n alkiot on muunnettava [Rauch: 2.4.4]:n avulla, ts. $\hat{T}(\phi) := T(\hat{\phi})$.
Jos $T = T_f$ jollain funktiolla f (ts. $T(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f\phi\ \forall \phi \in \mathcal{S}$; tällöin on tapana samaistaa T ja f), niin $\hat{T} = T_{\hat{f}}$, ts. $\mathcal{S}'$-Fourier-muunnos yhtyy tavalliseen Fourier-muunnokseen (todistus sivuutetaan).

Näytä, että jos $M \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ja $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d\ \exists N_\alpha, c_\alpha$ s.e. $|\partial^\alpha M| \le c_\alpha(1+|x|^{N_\alpha})$, niin $f \in \mathcal{S} \implies Mf \in \mathcal{S}$.[10]

Ratkaisu: Leibnizin kaava

$$\partial^\beta(fg) = \sum_{\zeta \le \beta} \binom{\beta}{\zeta} \partial^\zeta f \partial^{\beta-\zeta} g,$$

kun $f, g \in \mathcal{C}^\infty$ (tai edes em. osittaisderivaatat ovat olemassa), voidaan todistaa induktiolla [R3:6.15]. (Esim. $\mathbb{R}^1$:ssä $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.) Merkitään $a_{\beta,\zeta} := \binom{\beta}{\zeta}$.

Olkoon $p_N(x) := (1 + x^2)^N$ (tässä $x^2 := x \bullet x := \sum_k x_k^2 = |x|^2$). Nyt $|x|^n \le (1+|x|^2)^n \le (1+|x|^2)^N = (1+x^2)^N =: p_N(x)$, kun $n, N \in \mathbb{N} \wedge n \le N$ (tod.: $|x| \le 1$: selvästi; $|x| > 1$: selvästi).

Lemma Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja olkoon $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ polynomi sekä $\zeta \in \mathbb{N}^d$. Tällöin $\partial^\zeta f, pf, p\partial^\zeta f \in \mathcal{S}$.

Todistus: (a) $\partial^\zeta f \in \mathcal{C}^\infty$ ja $\|\partial^\zeta f\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha \partial^\beta \partial^\zeta f\|_\infty = \|x^\alpha \partial^{\beta+\zeta} f\|_\infty = \|f\|_{\alpha,\beta+\zeta} < \infty\ \forall \alpha, \beta$.

(b) 1^o Jos p on polynomi ($p(x) = \sum_{|\eta| \le N} b_\eta x^\eta$), niin $\|p(x)f\|_\infty$ $= \sup_x |\sum_{|\eta|\le N} b_\eta x^\eta f(x)| \le \sup_x \sum_{|\eta|\le N} |b_\eta||x^\eta f(x)| \le \sum_{|\eta|\le N} |b_\eta|\|f\|_{0,\eta} < \infty$.

2^o Jos $p(x) = \sum_{|\eta|\le N} b_\eta x^\eta$, niin $x^\alpha \partial^\beta[p(x)f(x)] = x^\alpha \sum_{\zeta\le\beta} a_{\beta,\zeta} p^{(\zeta)}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x) = \sum_{\zeta\le\beta} a_{\beta,\zeta} x^\alpha p^{(\zeta)}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x)$. Koska jokainen $a_{\beta,\zeta} x^\alpha p^{(\zeta)}$ on polynomi ja $f^{(\beta-\zeta)} \in \mathcal{S}$ [(a)], niin $\sup_x |a_{\beta,\zeta} x^\alpha p^{(\zeta)}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x)| < \infty$, joten myös tällaisten summan sup$< \infty$, ts. $\|pf\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha \partial^\beta[p(x)f(x)]\|_\infty < \infty$, siis $pf \in \mathcal{S}$.

(c) Seuraa kohdista (a) ja (b), QED.

Varsinainen ratkaisu: Nyt voidaan laskea $\|Mf\|_{\alpha,\beta}$: $|x^\alpha \partial^\beta[M(x)f(x)]|$

$$= |x^\alpha \sum_{\zeta\le\beta} a_{\beta,\zeta} M^{(\zeta)}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x)| \le \sum_{\zeta\le\beta} |x^\alpha a_{\beta,\zeta} M^{(\zeta)}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x)|$$

$$\le \sum_{\zeta\le\beta} |x^\alpha| a_{\beta,\zeta} c_\zeta (1+|x|^{N_\zeta}) |f^{(\beta-\zeta)}(x)| \le \sum_{\zeta\le\beta} |x^\alpha a_{\beta,\zeta} c_\zeta p_{N_\zeta}(x) f^{(\beta-\zeta)}(x)|$$

$$\le \sum_{\zeta\le\beta} \|q_{\alpha,\beta,\zeta} f^{(\beta-\zeta)}\|_\infty \overset{Lemma}{<} \infty,$$

missä $q_{\alpha,\beta,\zeta} := x^\alpha a_{\beta,\zeta} c_\zeta p_{N_\zeta}(x)$. Siis $Mf \in \mathcal{S}$, koska $\|Mf\|_{\alpha,\beta} < \infty\ \forall \alpha, \beta$.[11]

[10] Siis kun $\mathcal{S}$-funktioita kerrotaan polynomeilla, $\mathcal{S}$-funktioilla tms., niin tulos $\in \mathcal{S}$ (vieläpä $M\cdot \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, kuten tässä osoitetaan).

[11] Yo. laskelmista voi nähdä, että $\|Mf\|_{\alpha,\beta}$ saadaan mielivaltaisen pieneksi vaatimalla tietyt f:n seminormit (vain äärellisen monta, kun tiedetään α ja β) riittävän pieniksi, niinpä kuvaus $f \mapsto Mf$ on jatkuva ($\in \mathcal{L}(\mathcal{S})$), mikä nähdään sijoittamalla $f = g_n - g$ tms. [Rauch:Exe2.1.3i] (vrt. tehtävän 5.2 korollaariin). Vastaavasti myös $f \mapsto \partial^\zeta f$, $f \mapsto pf$ ja $f \mapsto p\partial^\zeta f$ voidaan todistaa jatkuviksi, siis nekin$\in \mathcal{L}(\mathcal{S})$.