Mat-1.155 ODYjen teoria, 4. harjoitus ma 16.2.1998 klo 14–16, U325 (2 sivua)

Korjattu versio. Ed. versiossa en ollut huomannut, että $\limsup^*_{n\to\infty} u_n(x) := \lim_{m\to\infty} \sup\{u_n(y) \mid n \geq m,\ |y-x| \leq 1/m\}$ ($\geq \limsup_{n\to\infty} u_n(x)$ selvästi) (vaan olin luullut $\limsup^* := (\limsup)^*$), siksi 4.1:ssä suppenemisen lokaali tasaisuus oli ollut mahdoton todistaa ja 4.2:n todistus oli tarpeettoman vaikea (ehdin jo ihmetellä, kuka sadisti tällaisia kirjoja oikein kirjoittaa). Tässä ovat korjatut mallivastaukset.

Tehtävä 4.1 ([VSA:Exe8.3,p.22] *helpohko, lyhyehkö*):
Olkoon $\{u_n\}$ tasaisesti rajoitettu ja olkoon u_n yhtälön $u_n + H(Du_n) - \frac{1}{n}\triangle u_n = f$ ratkaisu $\mathbb{R}^N$:ssä, $f \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R}^N)$ (tasaisesti jatkuva) ja $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$. (a) Todista $u := \limsup_{n\to\infty}{}^* u_n \leq \liminf_{n\to\infty *} u_n =: v$ (määritelmä: [VSA:s.20–21]) vertailemalla yhtälöön $u + H(Du) = f$. (b) Osoita, että u_n suppenee lokaalisti tasaisesti johonkin funktioon, ja että tämä on yhtälön $u + H(Du) = f$ yksikäsitteinen rajoitettu ratkaisu.

Ratkaisu: (Tässä kaikki limmit ja liminffit ovat pisteittäisiä.) **(a)** $F_n(x,r,p,X) := r + H(p) - \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X) - f \to F(x,r,p,X) := r + H(p) - f$ (erityisesti $F = \liminf F_n$, siis Th8.3 käytettävissä) (onhan $\triangle u = \sum_k u_{kk} = \operatorname{Tr}(D^2u)$). $u(x) \leq M := \sup_n \sup_x |u_n(x)| < \infty$ ("tas. raj."), joten u on yhtälön $F = 0$ aliratkaisu [Th8.3,p.21]. Vastaavasti v on yhtälön $F = 0$ yliratkaisu,[1] niinpä $u \leq v$ [Sec5,p.13–15].[2]

(b) Siis $\liminf \geq \liminf_* \geq \limsup^* \geq \limsup$, joten $\liminf = \limsup = \lim$ ja $u = v$, siis u on ratkaisu (etenkin jatkuva), lisäksi se on lim jonosta u_n. Rajoitettu ratkaisu on yksikäsitteinen (rajoitettu ratkaisu), koska "comparison holds for F" (toteuttaa vertailun).[3]

Väite: Suppeneminen on lokaalisti tasaista eli[4] tasaista jokaisessa $K \subset\subset \Omega$.

Tod.: Vastaoletus: $\neg\forall\epsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in K\ [|u_n(x) - u(x)| < \epsilon]$ eli[5] eli $\exists\epsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N\ \exists x \in K\ [|u_n(x) - u(x)| \geq \epsilon]$. Olkoon $\epsilon > 0$ tällainen. $\forall N\ \exists n_N \geq N, x_N\ [u_n(x_N) - u(x_N) \geq \epsilon]$ (tai vaihtoehtoisesti $\forall N\ \exists n_N \geq N, x_N\ [u_n(x_N) - u(x_N) \leq -\epsilon]$)[6]. Valitaan jonon $\{x_N\}$ kasautumispiste $x \in K$ [R:PMA] ja osajono $\{x_{N_k}\}$ s.e. $x_{N_k} \to x$ kun $k \to \infty$. Tällöin[7] $\limsup^* u_n(x) = u \geq \limsup_k u_{n_{N_k}}(x_{N_k})$, mutta $u_{n_{N_k}}(x_{N_k}) \geq u(x_{N_k}) + \epsilon \to u(x) + \epsilon$ (koska $u \in \mathcal{C}$), siis $u(x) \geq u(x) + \epsilon$, ristiriita, QED.[8]

Tehtävä 4.2 ([VSA:p.25–27] *vaikeahko, keskipitkä*):
[VSA:Exe9.3] Olkoon $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, $F \in \mathcal{C}(\bar\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}(n))$ aito ja tasaisesti elliptinen [s. 25], $f \in \mathcal{C}(\bar\Omega)$ ja $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Konstruoi ongelman $F = f$ yliratkaisu u.[9]

Vihje: Ks. sivujen 26–27 konstruointi (jossa $g = 0$), ota $\inf_{x_b\in\Omega} g(x_b) + \epsilon + MG(|x - z_b|)$, sitten vielä näistä $\inf_{\epsilon>0}$. Ellei tämä vihje riitä, ks. ratkaisun tiivistelmä.

Ratkaisun tiivistelmä: Sivujen 26–27 konstruktion viimeinen kaavarivi korvataan määritelmällä

$$u_\epsilon(x) := \inf_{x_b\in\partial\Omega} [g(x_b) + \epsilon + M_\epsilon G_\epsilon(|x - z_b|)]\ \forall x \in \bar\Omega,$$

jolloin $g(x_b) \leq u_\epsilon(x_b) \leq g(x_b) + \epsilon\ \forall x_b \in \partial\Omega$ ja u_ϵ on $F \geq f$:n jatkuva yliratkaisu (kuten kirjassa), (kun $r_0 := r_{\delta_\epsilon}$ ja $\sigma := \sigma_\epsilon$ sekä $M := M_\epsilon$ ja $G := G_\epsilon$ on valittu sopivasti); tämä $\forall\epsilon > 0$.

---

[1] Muistathan, että jokaisesta aliratkaisulauseesta saa vastaavan yliratkaisulauseen kaavan $\sup \ldots = -\inf - \ldots$ ja harjoituksen [VSA:Exe2.3] avulla.

[2] Tämä vaati H:n jatkuvaksi (ja $f \in \mathcal{C}_u$), vaikka ko. vaatimus oli [Exe8.3]:sta unohtunut.

[3] Jos u ja v ovat rajoitettuja ratkaisuja, niin ne ovat yli- ja aliratkaisuja, siis $u(x) \leq v(x) \leq u(x)\ \forall x$ [Sec5] eli $u = v$ (pykälä 5 olettaa u:n ja v:n rajoitetuiksi), QED. (Muita, kovin rajoittamattomia ratkaisuja voi ehkä ollakin (vrt. pykälä 6).)

[4] Joku voisi määritellä tämän niin, että kullakin x on oltava ympäristö $V_x \subset\subset \Omega$ s.e. suppeneminen on tasaista V_x:ssä. Määritelmät ovat kuitenkin selvästi ekvivalentteja (koska Ω on lokaalisti kompakti (ts. $\exists V_x'$ s.e. $\bar V_x'$ on kompakti) (onhan kunkin V_x sisälläkin tällainen V_x') jne.).

[5] Muistaneet logiikan alkeista, että $\neg\forall x \exists y\ [P(x,y)]$ joss $\exists x \neg\exists y\ [P(x,y)]$ joss $\exists x\ \forall y\ [\neg P(x,y)]$ jne.

[6] Jos kumpikaan ei olisi totta, ts. ed. ei pätisi jollain N_1 ja jälkimmäinen jollain N_2, niin arvolla $N := \max(N_1, N_2)$ ei enää löytyisi n_N, x_N s.e. $[|u_n(x) - u(x)| \geq \epsilon]$. Siksi jompikumpi on totta. Oletamme edellisen, jälkimmäiselle todistus on vastaavanlainen.

[7] $y_j \to y \implies \limsup_{j\to\infty} u_j(y_j) \leq u(y)$ kirjan perusteella [VSA:s.20].

[8] Huom.: tieto $\mathcal{C} \ni u_n \to u \in \mathcal{C}$ ei takaa suppenemisen tasaisuutta, esim. tasaisesti rajoitetut, jatkuvat kolmiofunktiot $u_n(x) := nx\chi_{]0,1/n[} + (2 - nx)\chi_{[1/n,2/n[}$ suppenevat funktioon $u = 0$ epätasaisesti jokaisessa 0:n ympäristössä (ja mm. joukossa $[0,1]$).

[9] Siis ongelman $F - f \geq 0$ (viskositeetti)ratkaisu (erityisesti $u(x) = g(x)\ \forall x \in \partial\Omega$). Em. oletukset sisältyvät kirjaan, vaikka siellä asia on kovin sekavasti ilmaistu. Vrt. sivun 25 kommentteihin (esim. F on tas. ell. joss $F - f$ on ko. konstruktiossa) ja pykälään 4.

Proposition 8.2 [s. 20] perusteella $U_* := \inf_{\epsilon>0*} u_\epsilon$ on $F-f$:n yliratkaisu, ja (selvästi $\inf_{\epsilon>0} u_\epsilon = g$) voidaan todistaa $U_* = g$ (joukossa $\partial\Omega$), QED.

Ratkaisun yksityiskohdat: Kirjoitamme siis sivut 26–27 uudelleen. Temput onnistuvat, koska r_0:aa voi pienentää rajatta (jolloin kukin z_b lähestyy omaa x_b:tään saman verran), se määrää σ:n minimin, josta σ:aa voi suurentaa rajatta [s. 27], mikä määrää M:n minimin, josta M:ää voi suurentaa rajatta (nämä asiat käyvät helposti ilmi sivujen 26–27 konstruktiosta). Tarkoituksena on siis konstruoida ylhäältä puolijatkuva $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, joka ratkaisee yhtälön $F - f \geq 0$. $M_g := \sup|g|$.

1^o Jokaisella $\epsilon > 0$ konstruoidaan u_ϵ seuraavasti: g on tasaisesti jatkuva kompaktissa $\partial\Omega$ [R:PMA], joten $\exists\delta := \delta_\epsilon > 0$ s.e.

$$x_b, x_b' \in \partial\Omega \wedge |x_b - x_b'| < \delta_\epsilon \implies |g(x_b) - g(x_b')| < \epsilon.$$

Erityisesti $g(x_{b'}) + \epsilon \geq [g(x_b) - \epsilon] + \epsilon = g(x_b)$, kun $|x_{b'} - x_b| < \delta_\epsilon$. Valitaan r_0:n sijaan $r_\delta := \min(\delta_\epsilon/6, r_0)$ ja valitaan sille z_b:t (kuten kirjassa valittiin r_0:lle), jokin sille kelvollinen $\sigma > 0$ kuten kirjan sivulla 27 sekä riittävän suuri [s. 27] $M \geq 2M_g/G(2r_\delta)$,[10] jolloin

$$|x_b' - x| \geq \delta_\epsilon/2 \implies |x - z_b'| \geq |x - x_b'| - |z_{b'} - x_{b'}| \geq \delta_\epsilon/2 - r_\delta \geq 2r_\delta,$$

ja näin ollen $MG(|x - z_{b'}|) \geq MG(2r_\delta) \geq 2M_g$, joten $g(x_{b'}) + \epsilon + MG(|x - z_{b'}|) \geq g(x_{b'}) + 2M_g \geq M_g$. Niinpä $\forall\epsilon > 0$ pätee (huom.: $M = M_\epsilon$, $G = G_\epsilon$)

$$u_\epsilon(x) := \inf_{x_b' \in \partial\Omega} \ldots \geq \min\left[M_g, \inf_{x_b' \in \partial\Omega \wedge |x_b' - x| < \delta_\epsilon/2} g(x_b') + \epsilon + M_\epsilon G_\epsilon(|x - z_b|)\right]$$

(kun kerran kaukaisemmilla $x_b' \in \partial\Omega$ infimoitava lauseke on vähintään M_g).

2^o Olkoon $\epsilon > 0 \wedge x_b \in \partial\Omega \wedge |x - x_b| < \delta_\epsilon/2$. Jos $x_b' \in \partial\Omega \wedge |x - x_b'| < \delta_\epsilon/2$, niin $|x_b - x_b'| < \delta_\epsilon$, joten $g(x_b') \geq g(x_b) - \epsilon$ ja siksi[11] $u_\epsilon(x) \geq \min[M_g, g(x_b) - \epsilon + \epsilon + 0] = g(x_b)$. Niinpä $U_*(x_b) \geq g(x_b)$. Toisaalta $U_*(x_b) \leq u_\epsilon(x_b) \leq g(x_b) + \epsilon + 0\ \forall\epsilon > 0$, joten $U_*(x_b) \leq g(x_b)$, siis $U_*(x_b) = g(x_b)$, kuten pitikin. Lisäksi (kirjan argumentein) u_ϵ (annetulla $\epsilon > 0$) on yhtälön $F \geq f$ jatkuva yliratkaisu, QED.[12]

[10] Onhan $G(2r_\delta) := (r_\delta)^{-\sigma} - (2r_\delta)^{-\sigma} > 0$ [s. 26].

[11] Onhan aina $G \geq 0$, koska $d(z_b', \Omega) = r_\delta$, G on kasvava ja $G(r_\delta) = 0$.

[12] Kirjan väittämä tasajatkuvuus voidaan vaikka todeta siksi, että $L_\epsilon := \sup_{r \geq r_\delta} G'(r) = \sup_{r\geq r_\delta} \sigma r^{-(\sigma+1)} = \sigma r_\delta^{-(\sigma+1)} < \infty$, ja näin ollen $x, y \in \Omega \wedge |x - y| < \epsilon'/L_\epsilon M \implies ||x - z_b| - |y - z_b|| < \epsilon'/L_\epsilon M \implies |MG(|x - z_b|) - MG(|y - z_b|)| < \epsilon'$.