Mat-1.155 ODYjen teoria, 2. harjoitus ma 2.2.1998 klo 14–16, U325 (2 sivua)

Tehtävä 2.1 ([VSA:Exe4.3,p.13] *keskitasoa, lyhyehkö*):
Olkoon F aito (*proper*), $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ sen aliratkaisu, $K \in \mathcal{C}^1$, $K'(r) > 0\ \forall r$, $\operatorname{Ran}(u) \subset \operatorname{Ran}(K)$. Tällöin $w := K^{-1}u$, on yhtälön $G(x, w, Dw) = F(x, K(w), K'(w)Dw) = 0$ aliratkaisu (mutta G ei välttämättä ole aito) (vast. yliratkaisuille).

Vastaus: Jos $K \in \mathcal{C}^1(]a, b[) \wedge K'(r) > 0\ \forall r$, niin $\exists K^{-1} \in \mathcal{C}^1 \wedge (K^{-1})'(K(r)) = 1/K'(r) > 0\ \forall r \in]a, b[$ [R:PMA:Exe5.2,p.114] (erityisesti myös K^{-1} on aidosti kasvava). $\{x \mid \alpha > w(x) = K^{-1}(u(x))\} = \{x \mid K(\alpha) > u(x)\}$ on avoin $(\forall\alpha)$, koska u on ylhäältä puolijatkuva, siis w:kin on. $G(x, r, p) := F(x, K(r), K'(r)p)$.

Olkoon a on $w - \phi$:n paikallinen maksimi ja $\phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$,[1] sekä $\phi(a) = w(a)$.[2]

Meidän on osoitettava, että

$$0 \geq G(a, w(a), D\phi(a)) = F(a, K(w(a)), K'(w(a))D\phi(a)).$$

$\psi := K \circ \phi \in \mathcal{C}^1$. Jollain $r > 0$ on $0 = w(a) - \phi(a) \geq w(x) - \phi(x)$ eli $\phi(x) \geq w(x)$ aina kun $|x - a| < r$ (koska a on maksimipiste). Koska K on aidosti kasvava, samoilla x on $K(\phi(x)) \geq K(w(x)) = u(x)$ eli $u(a) - \psi(a) = K(w(a)) - K(\phi(a)) = 0 \geq u(x) - K(\phi(x)) = u(x) - \psi(x)$, joten a on $u - \psi$:n lokaali maksimi. Niinpä $0 \geq F(a, u(a), D\psi(a)) = F(a, K(w(a)), K'(w(a))D\phi(a))$, QED.

Tehtävä 2.2 (*vaikea keksiä, keskipitkä*):
[3] *Osoitetaan, että* $u(x, t) := \inf_{|y-x|\leq t}[u_0(y)]$ *on yhtälön* $u_t + |Du| = 0$ *ratkaisu, kun* $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. (Alkuperäinen tehtävä: $n = 1$ eli $Du = u_x$. Huom.: $u(x, 0) = u_0(x)\ \forall x$, tämä siis ratkaisee ongelman mielivaltaisilla jatkuvilla alkuarvoilla.)

Väite 1: $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$. Tod.: Olkoon $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ja $\epsilon > 0$. $M := t + \epsilon$. Jatkuva funktio u_0 on kompaktissa joukossa $K := \bar{B}_M(x) := \{z \mid |z-x| \leq M\}$ tasaisesti jatkuva [R:PMA:4.19], joten annetuille $\epsilon > 0, x, t$ voidaan valita $\delta \in]0, \epsilon[$ s.e. $z, z' \in K \wedge |z - z'| < \delta \implies |u_0(z) - u_0(z')| < \epsilon$. Jos $|(x', t') - (x, t)| < \delta/2$ ja $u(x', t') = \min_{|y-x'|\leq t'}[u_0(y)] = u_0(y_0')$,[4] niin δ:n säteeltä y_0':sta löytyy $y_0 := x + \frac{t}{t+\delta}(y_0' - x) \in B_t(x)$ (koska $|y_0' - x| \leq |y_0' - x'| + |x' - x| < t' + \delta/2 < t + 2\delta/2$). Niinpä $u(x, t) \leq u_0(y_0) < u_0(y_0') + \epsilon = u(x', t') + \epsilon$. Vastaavasti valitsemalla y_1 ja y_1' (kääntäen), saadaan $u(x', t') \leq u_0(y_1') < u_0(y_1) + \epsilon = u(x, t) + \epsilon$, näistä siis yhdessä $|u(x', t') - u(x, t)| < \epsilon$, QED.

Väite 2: $u(x, t) = \inf_{|y-x|\leq h}[u(y, t - h)]$, *kun* $h \leq t$. Tod.: $= \inf_{|y-x|\leq h} \inf_{|z-y|\leq t-h}[u_0(z)] = \inf_{|y-x|\leq h \wedge |z-y|\leq t-h}[u_0(z)] = \inf_{|z-x|\leq h+t-h}[u_0(z)] = u(x, t)$ (tarkasta itse, esim. $y := x + \frac{h}{t}(z - x)$ jne.).

Väite 3: *u on aliratkaisu.* Tod.: Olkoon $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times]0, \infty[)$ ja olkoon (x, t) funktion $u - \phi$ lokaali maksimi eli maksimi jossain $B_{\delta'}(x, t)$. Jos tällöin $h \in]0, \delta[$, $\delta := \min(t, \delta'/2) > 0$, niin

$$y \in \mathbb{R}^n \wedge |y - x| \leq \delta \implies u(y, t - h) - \phi(y, t - h) \leq u(x, t) - \phi(x, t).$$

On osoitettava, että $\phi_t + |D\phi| \leq 0$. Yo. epäyhtälöstä saadaan $u(y, t - h) \leq \phi(y, t - h) + u(x, t) - \phi(x, t) \quad (|y - x| \leq \delta)$ eli

$$u(x, t) \overset{\text{Väite 2}}{=} \inf_{|y-x|\leq h} u(y, t - h) \leq \inf_{|y-x|\leq h}[\phi(y, t - h) + u(x, t) - \phi(x, t)],$$

josta vähentämällä $u(x, t)$ saadaan $0 \leq \inf_{|y-x|\leq h}[\phi(y, t - h) - \phi(x, t)]$. Taylorin polynomin (esim. [R:PMA:Exe30b,p.244]) perusteella $\phi(a + z) -$

---

[1] Voidaan osoittaa [Barles:Prop2.2], että ensimmäisen kertaluvun ongelman viskositeettiratkaisun määritelmässä $\forall\phi \in \mathcal{C}^2$ on ekvivalenttia ehdon $\forall\phi \in \mathcal{C}^1$ kanssa (tätä tietoa tarvitaan ψ:n kohdalla).

[2] Vm. oletus voidaan aina tehdä (yleisyyttä rajoittamatta), koska määritelmällä $\tilde{\phi} := \phi + [w(a) - \phi(a)]$ saadaan samat maksimit ja minimit ja $D\tilde{\phi} = D\phi$.

[3] Tehtävissä 2.2 ja 2.3 ratkaisun jatkuvuuden todistaminen on kokeneelle rutiinihomma, mutta ratkaisevuuden todistaminen hankalammin keksittävä (mutta kohtuudella seurattava) $u - \phi$-maksimiepäyhtälön pyörittely Taylorin polynomin kautta vaadituksi epäyhtälöksi.

[4] Inf=min, kun on kyse jatkuvasta funktiosta kompaktissa joukossa [R:PMA]. Valitaan siis jokin $y_0' \in \bar{B}_{t'}(x')$, jossa minimi saavutetaan.

$\phi(a) = \nabla\phi(a) \bullet z + r(z)$, missä $r(z)/|z| \to 0$, kun $z \to 0$. Sijoituksella $a := (x,t)$, $z := (y-x, -h)$ saadaan ed. epäyhtälöstä

$$0 \leq \inf_{|y-x|\leq h} [(-h)\phi_t(x,t) + D\phi(x,t) \bullet (y-x) + r(y-x,h)].$$

Koska $-\inf(-...) = \sup(...)$, on (kerrotaan -1:llä ja jaetaan h:lla)

$$0 \geq \sup_{|y-x|\leq h} [\phi_t(x,t) - D\phi(x,t) \bullet (y-x)/h - r(y-x,h)/h],$$

$$\geq \phi_t(x,t) + \sup_{|y-x|\leq h} [-D\phi(x,t) \bullet (y-x)/h] + \sup_{|y-x|\leq h} [-r(y-x,h)/h)],$$

josta laittamalla $h \to 0$ saadaan[5] vaadittu $0 \geq \phi_t(x,t) + \sup_{|w|\leq h}[D\phi(x,t) \bullet w/h] + 0 = \phi_t + |D\phi(x,t)|$, koska $|r(y-x,h)|/|h| \leq 2|r(y-x,h)|/|(y-x,h)| \to 0$.

Väite 4: u on yliratkaisu. Tod.: Samaan tapaan kuin aliratkaisu.

Tehtävä 2.3 (*vaikea keksiä, keskipitkä*):
Osoita, että $u(x,t) := \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \left[u_0(y) + \frac{|x-y|^2}{4t}\right] : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (on jatkuva ja) ratkaisee yhtälön $u_t + |Du|^2 = 0$ aina kun $u_0 \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (jatkuva ja rajoitettu).

Vastaus: Määritellään kuvaus $S_t : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n) \ni u_0 \mapsto S_t u_0$ s.e. $(S_t u_0)(x) := \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \left[u_0(y) + \frac{|x-y|^2}{4t}\right]$ (kun $t \in \mathbb{R}_+$). Tällöin $u(x,t) = (S_t u_0)(x)$. Selvästi $-M \leq (S_t u_0)(x,t) \leq M \forall x$, kun $M := \sup |u_0|$.

Väite 1: $S_t S_s = S_{s+t}$. Tod.: $M \geq (S_s S_t u_0)(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n}[(S_t u_0)(y) + \frac{|x-y|^2}{4s}] = \inf_{y\in\mathbb{R}^n}[\inf_{z\in\mathbb{R}^n}[u_0(z) + \frac{|y-z|^2}{4t}] + \frac{|x-y|^2}{4s}] = \inf_{y,z\in\mathbb{R}^n}[u_0(z) + \frac{s|y-z|^2+t|x-y|^2}{4st}]$.

Yllä inf voidaan yhtä hyvin ottaa kompaktin $(y,z) \in \bar{B}_{R'} \times \bar{B}_{R'}$ yli, missä $R' := 88M\max(s,t) + |x|$, koska sen ulkopuolella lauseke varmasti ylittää M:n[6]. Niinpä inf = min (funktio on jatkuva), siis myös (kiinteillä s,t,x,z) y minimoi lausekkeen $f(y) := s|y-z|^2 + t|x-y|^2$ eli[7] $0 = Df = 2s(y-z) - 2t(x-y)$, eli minimissä $f(y) = \frac{st}{s+t}|x-z|^2$ ja siis

$$(S_s S_t u_0)(x) = \inf_{z\in\mathbb{R}^n}[u_0(z) + \frac{|x-z|^2}{4(s+t)}] = (S_{s+t}u_0)(x), \quad \text{QED.}$$

Väite 2: *$u(x,t) = (S_{h+(t-h)}u_0)(x) = (S_h S_t u_0)(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n}[u(y,t-h) + \frac{|x-y|^2}{4h}]$, kun $h \leq t$.* Tod.: Väite 1.

Väite 3: $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$. Tod.: $f_{x,t}(y) := u_0(y) + \frac{|x-y|^2}{4t}$. Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}_+$ ja $\epsilon > 0$. Meidän riittää löytää $\delta \in]0, s/2[$ s.e. $|(x,t)-(a,s)| < \delta \implies |u(x,t) - u(a,s)| < \epsilon$. Selvästi $u(x,t) := \inf_{y\in\mathbb{R}} f_{x,t}(y) \leq u_0(x) + 0 \leq M \leq u_0(y) + |x-z|^2/4t$, kun $|x-z|^2/4t \geq 2M$ eli $|z-x| \geq \sqrt{8Mt}$, mikä toteutuu aina kun[8] $|z-x| \geq R := \max(4\sqrt{Ms}, a+1) \wedge t < 2s$ ja aina kun $|z| \geq 2R \wedge |x| \leq R \wedge t < 2s$. Siis arvoilla $t < 2s$ on $u(x,t) = \inf_{|y-x|<R} f_{x,t}(y)$ ($= \inf_{|y|<2R} f_{x,t}(y)$, kun $|x| \leq R$).

$g(x,y,t) := \frac{|x-y|^2}{4t}$ on jatkuva funktio, joten se ja siis myös f on tasaisesti jatkuva [R:PMA:4.19] kompaktissa $\bar{B}_{2R} \times \bar{B}_{2R} \times [s/2, 2s] =: K$. Siis jollain $\delta' \in]0, s/2[$ pätee $|(x,t)-(a,s)| < \delta := \min(\delta', 1) \implies u(x,t) = \inf_{|y|<2R} f_{x,t}(y) \leq \inf_{|y|<2R}[f_{a,s}(y) + \epsilon] = u(a,s) + \epsilon$; vast. $u(a,s) \leq u(x,t) + \epsilon$, eli u on jatkuva pisteessä (a,s).

Väite 4: *u on aliratkaisu.* Toimitaan kuten tehtävässä 2.2/K98 (vaihe 3) edellä kunnes saadaan ko. tehtävän viimeisen erillisen kaavariviin vastine:[9]

$$0 \geq \sup_{|y-x|<\delta} [\phi_t(x,t) - D\phi(x,t) \bullet (y-x)/h - \frac{|x-y|^2}{4h} + r(y-x,h)/h] \ (0 < h < \delta).$$

Riittävän pienillä h valinnalla $y = x - 2hD\phi(x,t)$ on $|y-x| < \delta$, siis $0 \geq \phi_t(x,t) + D\phi(x,t) \bullet 2D\phi(x,t) - \frac{4h^2|D\phi(x,t)|^2}{4h}/h + r(-2hD\phi(x,t), h)/h \overset{h\to 0}{\to} \phi_t(x,t) + |D\phi(x,t)|^2$.

Väite 5: u on yliratkaisu. Tod.: Samaan tapaan kuin aliratkaisu.

[5] Onhan $0 \geq F(h)\ \forall h \implies 0 \geq \lim F(h)$. (Huom.: vastaavasti $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in A \implies \forall x \in \bar{A}$, kun $f, g \in \mathcal{C}(\bar{A})$.)

[6] Koska tällöin jompi kumpi neliöistä on ainakin $(44M\max(s,t))^2$ jne.

[7] $x^2 := |x|^2 := x \bullet x := \sum_k x_k^2 \in \mathcal{C}^\infty$, $D|x|^2 = \sum_k 2x_k = 2x$.

[8] Alla on lisätty $a+1$ siksi, että $\delta < 1$:n valinnalla alempana taataan $|x| < R$.

[9] Kohdassa, jossa sovellettiin väitettä 2, nyt sovelletaan tämän tehtävän väitettä 2, siksi "$|y-x| < \delta$" ja joudutaan lisäämään (sittemmin negatoitunut) termi $\frac{|x-y|^2}{4h}$.