Mat-1.155 ODYjen teoria, 11. harjoitus ma 6.4.1998 klo 14–16, U325 (4 sivua)

Huom.: harjoituksia on 12 (kai) tai 13 kpl; pääsiäismaanantaina 13.4. ei ole laskuharjoituksia.

Tehtävä 11.1 ([s. 115–116] *alku helpohko ja hyvä, derivoituvuus vaikea ja työläs*):
Vie tarkasti läpi laskut, jotka osoittavat, että

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^{3/2}\,dx \le 0,$$

missä u toteuttaa ehdot $u_t = \triangle u$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$; $u(0,x) = f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.[1]

Vihje: Lue 1^o ja 2^o ratkaisun tiivistelmästä. Toteuta ne ja sovella Youngin lausetta, niin saat todistettua integraalin väheneväksi. Integraalin derivoituvuuden todistaminen (4^o) on vaikeaa, joten voit jättää sen tekemättä.

Ratkaisun tiivistelmä:
1^o Ratkaistaan u (kuten kirjassa). Nähdään, että $u(t) = K_t * f \in \mathcal{S}$, missä $K_t \in \mathcal{S}$ $\forall t > 0$.
2^o Lasketaan, että $\|K_t\|_1 = 1$ ja $K_{t+h} * f = K_h * (K_t * f)$ $(t, h > 0)$.
3^o Youngin lauseen perusteella $\|u(t+h)\|_p = \|K_h * u(t)\|_p \le \|K_h\|_1 \|u(t)\|_p = \|u(t)\|_p$. Siis $\|u(t,\cdot)\|_p$ on vähenevä, joten myös $I(t) := \|u(t,\cdot)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^{3/2}\,dx$ (kun $p = 3/2$) on vähenevä.
(Huom.: kohtien $1^o - -3^o$ sijasta voidaan soveltaa lausetta 3.6.4 [s.115].)
4^o&5^o Niinpä $I'(t) \le 0$, jos I on derivoituva; todistetaan, että I on derivoituva. (Huom.: kohta 4^o on kyllä hyödyllinen ja opettava, mutta ehkä turhan työläs.)[2]

1° Tämä on todistettu kirjan sivuilla 112–115, tässä pikakertaus: $u_t = \triangle u$, joten $\hat{u}_t = \mathcal{F}\triangle u = \mathcal{F}\sum_k \partial_k^2 u = \sum_k (i\xi_k)^2 \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$, minkä ainoa $\mathcal{S}$-ratkaisu on $\hat{u} = e^{-\xi^2 t}\hat{f}$ $(t \ge 0)$.[3]

Tehtävän 5.3 perusteella $\gamma e^{-t\xi^2} = \hat{K}_t(\xi)$, missä $K_t(x) = \gamma(2t)^{-d/2} e^{-x^2/4t} = (4\pi t)^{-d/2} e^{-x^2/4t}$ (vrt. [s.138(4)]). $\mathcal{F}(K_t * f) = \gamma^{-1}\hat{K}_t \hat{f} = e^{-t\xi^2}\hat{f} = \hat{u}(t)$ [s.83(5)], joten $u = K_t * f$ (olemme ratkaisseet lämpöyhtälön).

2° $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-r^2x^2} = (\pi/r^2)^{d/2}$, kuten harjoitustehtävässä 10.2 (kaava (*)) todettiin, joten

$$\|K_t\|_1 = (4\pi t)^{-d/2}\int e^{-x^2/4t} = (4\pi t)^{-d/2}(\pi/(1/4t))^{d/2} = 1.$$

$\mathcal{F}[K_{t+h} * f] = \mathcal{F}u(t+h) = e^{-\xi^2(t+h)}\hat{f} = e^{-\xi^2 h}e^{-\xi^2 t}\hat{f} = e^{-\xi^2 h}\hat{u}(t) = \mathcal{F}[K_h * u(t)]$.

3° Ei lisättävää tiivistelmään.

4° $g_x(t) := |u(t,x)|^2 = u\bar{u} \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty[)$ kiinteällä x (koska $\bar{u} \in \mathcal{C}^\infty$, koska $u \in \mathcal{C}^\infty$ (ks. ed. alaviite) ja $\bar{u}_t = (\operatorname{Re} u)_t - i(\operatorname{Im} u)_t = (\operatorname{Re} u - i\operatorname{Im} u)_t = (\bar{u})_t$ jne), jolloin $\exists g_x'(t) = u_t\bar{u} + u\bar{u}_t = 2\operatorname{Re}(u_t\bar{u})$. Ketjusäännön perusteella $\exists (g_x^r)'(t) = r g_x(t)^{r-1} g_x'(t)$ niillä t, x, joilla $g_x(t) > 0$, kunhan $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Olkoon sitten $g_x(t) = 0$ (todistetaan derivoituvuus näissäkin). $M := \sup_{[0,t+1]} |g_x''|$. Tällöin $u(t,x) = 0 = \bar{u}(t,x)$, joten $g_x'(t) = 0$. Niinpä tällaisissa pisteissä Taylorin kehitelmän perusteella $g_x(t+h) = 0 + 0 + h^2 g_x''(t+s_h)/2!$

[1] Olemme merkinneet lämmönjohtavuusvakion ν ykköseksi merkintöjen helpottamiseksi. Lasku ei muutu tästä mitenkään, ν olisi helposti lisättävissä joka kohtaan (sitä paitsi sen saa aina eliminoitua valitsemalla lämpötilan yksikön sopivasti).

[2] **"TAPA 2":** Kohdan 5^o tapaan voidaan osoittaa, että seuraavassakin tapauksessa $\int \partial_t = \partial_t \int$, joten voitaisiin laskea $\partial_t \int |u|^{3/2} = \int \partial_t = \int \partial_t (u\bar{u})^{3/4} = \int \partial_t (3/4)(u\bar{u})^{-1/4}(u_t\bar{u} + u\bar{u}_t) = \int \partial_t (3/4)(u\bar{u})^{-1/4}(\bar{u}\triangle u + u\triangle\bar{u})$. Jos tuo $(u\bar{u})^{-1/4}$ puuttuisi, homma menisi mukavasti Greenin kaavoilla; nyt tämä tapa ei näytä onnistuvan.

[3] Mekaanisella laskulla nähdään, että todella $\hat{u}(t) \in \mathcal{S}$ $\forall t > 0$. Toinen mekaaninen lasku ja [Prop3.3.1] (sen todistus toimii silloinkin, kun $\mathbb{R}$:n tilalla on jokin muu väli, esim. $[0,\infty[$) osoittavat, että

$$\underline{\hat{u} \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty[; \mathcal{S})}$$

$(\partial_t^k \hat{u} = (-\xi)^k \hat{u} \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty[\times\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ (tässä $\partial_t^k \hat{u}(0)$ tarkoittaa tietenkin toispuolista derivaattaa) ja $t \mapsto \partial_t^k \hat{u}$ on jatkuva $[0,\infty[\to \mathcal{S}$, koska $\|(-\xi)^k e^{-\xi^2(t+h)}\hat{f} - (-\xi)^k e^{-\xi^2 t}\hat{f}\|_{\alpha,\beta} = \|(-\xi)^k (e^{-\xi^2 h} - 1) u(t)\|_{\alpha,\beta} < \epsilon$, kun $h \ge 0$ on riittävän pieni (mekaaninen lasku)).

Niinpä $u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u} \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty[; \mathcal{S})$ ja $\partial\mathcal{F}^{-1}\hat{u} = \mathcal{F}^{-1}\partial\hat{u}$ (koska $\mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$; helppo lasku osoittaa, että $T \in \mathcal{L}(X,Y) \wedge u \in \mathcal{C}^1(I,X) \implies Tu \in \mathcal{C}^1(I,Y) \wedge \partial Tu = T\partial u$). Siis myös $\mathcal{F}\partial_t u = \partial_t \mathcal{F} u$, kuten yllä oletettiin.

u on ainoa $\mathcal{C}^1([0,\infty[; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$-ratkaisu, koska tällöin $u \in \mathcal{C}^1([0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$ [Prop3.3.1] ja välttämättä $\partial_t[e^{\xi^2 t}\hat{u}(t)(\xi)] = 0$ ja näin ollen $[e^{\xi^2 t}\hat{u}(t)(\xi)] = [e^{\xi^2 0}\hat{u}(t)(\xi)] = \hat{f}(\xi)$ eli $\hat{u}(t)(\xi) = e^{-\xi^2 t}\hat{f}(\xi)$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^d$.

jollain $s \in [0,h]$ [R1:5.15].

$$|\frac{|g_x(t+h)|^{3/4}-|g_x(t)|^{3/4}}{h}| \le |\frac{|h^2M|^{3/4}-|0|^{3/4}}{h}| = M^{3/4}h^{1/2} \to 0,$$

joten $F_x(t) := |u(t,x)|^{3/2} = g_x(t)^{3/4} \ge 0$ on derivoituva $\forall t \in [0,\infty[$ ja sen derivaatta on ($r = 3/4$)

$$F_x'(t) = rg_x(t)^{r-1}g_x'(t)\chi_{g_x(\cdot)>0}(t) = \frac{3}{4}|u|^{-1/2}2\,\mathrm{Re}(u_t\bar{u})\chi_{u(\cdot,x)\neq 0}(t)$$

$$= \frac{3}{2}|u|^{1/2}\,\mathrm{Re}(u_t\frac{\bar{u}}{|u|})\chi_{u(\cdot,x)\neq 0}(t).$$

$G(t,x) := F_x(t) \ge 0$, jolloin $|G_t(t,x)| = |F_x'(t)| \le \frac{3}{2}\sqrt{|u(t,x)|}|u_t(t,x)|$ (erityisesti F_x' on jatkuva myös niissä t, joissa $u(t,x) = 0$, siis F_x' ja G_t ovat jatkuvia kiinteällä x).

5° Nyt voidaan osoittaa, että $\partial_t \int_{\mathbb{R}^d} G = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t G$:
Olkoon $t_0 > 0$ sekä $\epsilon > 0$. $u_t \in \mathcal{C}([0,\infty[;\mathcal{S})$ ja $\|\cdot\|_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}(\mathcal{S};\mathbb{R})$, ja näin ollen $t \mapsto \|u_t(t)\|_{\alpha,\beta}$ on jatkuva $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$, joten em. jatkuvalla funktiolla on maksimi kompaktissa joukossa, siis $\exists M_{\alpha,\beta} := \max_{t\in[0,t_0+1]}\|u_t(t)\|_{\alpha,\beta}$. Valitaan s s.e. $\langle x\rangle^{-s} \in L^1$. $M'' := \sup_{[0,t+1]}\|\langle x\rangle^s u_t\|_\infty$ ($< \infty$, koska sitä voidaan majoroida $M_{\alpha,0}$-termeillä). Valitaan $R > 0$ s.e. $\int_{|x|>R}\langle x\rangle^{-s}\,dx < \epsilon/3M''M^{1/2}$. Jos $|h| \le 1$, niin

$$\int_{|x|>R}|G_t(t+h,x)| \le 2M^{1/2}\int_{|x|>R}|u_t(t+h,x)| \le 2M^{1/2}\int_{|x|>R}\langle x\rangle^{-s}M'' < \epsilon/3,$$

$$|h^{-1}[\int_{\mathbb{R}^d}G(t+h,x) - \int_{\mathbb{R}^d}G(t,x)] - \int_{\mathbb{R}^d}G_t(t,x)|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d}|\frac{G(t+h,x)-G(t,x)}{h} - G_t(t,x)| = \int_{\mathbb{R}^d}|G_t(t+s_{h,x},x) - G_t(t,x)|$$

$$= \int_{|x|>R} + \int_{B_R} \le \int_{|x|>R}(|G_t(t+s_{h,x},x)|+|G_t(t,x)|) + \int_{B_R}|G_t(t+s_{h,x},x)-G_t(t,x)|$$

$$< 2\epsilon/3 + \int_{B_R}|G_t(t+s_{h,x},x) - G_t(t,x)| < \epsilon$$

(missä $s_{h,x} \in]0,h[\ \forall x$) riittävän pienillä $|h|$, koska dominoidun konvergenssin perusteella viimeinen integraali menee nollaan, koska integrandi menee pisteittäin nollaan (koska G_t on jatkuva) ja sillä on olemassa $L^1(B_R)$-majorantti (esim. vakiofunktio $2\sqrt{M}M'$, missä $M := \|f\|_\infty \ge \|u(t)\|_\infty\ \forall t$ ja $M' := \sup_{[0,t+1]}\|u'(t)\|_\infty$ (äärellisiä, koska $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ on jatkuva (siis myös $\|u(\cdot)\| : [0,t+1] \to \mathbb{R}$) ja $[0,t+1]$ on kompakti), QED.[4]

Huom.: käyttämällä funktion $\psi : x \mapsto x^{3/2}$ sijaan funktiota $x \mapsto (\epsilon + |x|^2)^{3/2} - \epsilon^{3/2}$ ja laittamalla sitten $\epsilon \to 0+$ vältetään nolla-arvoisen funktion derivoinnin vaiva 4^o:ssa, mutta se tapa ei välttämättä ole paljon helpompi.

Tehtävä 11.2 ([s. 112–116, Exe3.6.1] *keskitasoa, keskipitkä, aika hyvä*): Olkoon $S(t)f$ ($t \ge 0$) ongelman

$$\begin{cases} u_t &= \triangle u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d; \\ u(0,x) &= f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

ratkaisu. Osoita, että $S(t)$:n määrittelyjoukkoa voidaan laajentaa s.e. $S(t) \in \mathcal{L}(\mathrm{Re}\,L^2(\mathbb{R}^d))$ $\forall t \ge 0$, missä $\mathrm{Re}\,L^2(\mathbb{R}^d) := \{f$ reaaliarvoinen $|\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2\,dx < \infty\} = \{\mathrm{Re}\,f \mid f \in L^2\}$ varustetaan L^2-normilla. Osoita, että S on $\mathrm{Re}\,L^2$-avaruuden puoliryhmä.[5]

Vihje: Esim. Fourier-muunnosten avulla on helppo todistaa $\mathcal{S}$:llä määritelty $S(t)$ jatkuvaksi myös L^2-normin suhteen, sovella sitten [Prop2.3.1,s.70–71]. Jatkuvuus joko $\mathcal{S}$-jatkuvuudesta tai Fourier-muunnoksesta. Puoliryhmäominaisuus muunnoksesta. Todistukset $\mathrm{Re}\,L^2$:lle tai L^2:lle ovat samanlaisia. Lue väitteet 1^o–5^o vihjeeksi, ellet muuten selviä.

Vastaus: Lue ensin väitteet 1^o–5^o, vasta sitten niiden todistukset.

1° *Väite: $S(t)$ laajenee kuvaukseksi $\in \mathcal{L}(L^2)$.* Tod.:

---

[4]**Tärkeää:** Yleensäkin $\partial_t\int_Q f(t,x)\,dx = \int_Q f_t(t,x)\,dx$, jos f_t on jatkuva ja sillä on L^1-majorantti g (jossain tutkittavan t:n ympäristössä), jolloin $\int|f_t(t+s_{h,x},x)-f_t(t,x)| \to 0$ dominoidun konvergenssin perusteella, koska $|f_t(t+s_{h,x},x) - f_t(t,x)| \le 2g$ ja se menee pisteittäin nollaan f_t:n jatkuvuuden perusteella. (Siis kiinteillä x oltava $f(\cdot,x) \in \mathcal{C}^1$ ja kiinteillä t on oltava $f(t,\cdot), f_t(t,\cdot) \in L^1(Q)$.)
(Tässä tehtävässä vain oli helpompaa laittaa integraali ensin osiin.)

[5]Osoitamme vastauksessa, että se on minkä tahansa avaruuden $\mathrm{Re}\,L^p$, L^p, $\mathcal{C}_0$ tai $\mathrm{Re}\,\mathcal{C}_0$ puoliryhmä, kun $1 \le p < \infty$.

TAPA 1: Olkoon $1 \leq p < \infty$ (tehtävässä kysyttiin vain tapausta $p = 2$). Jos $\phi \in \mathcal{S}$, niin $S(t)\phi = K_t * \phi$ ja $\|K_t\|_1 = 1$ [teht.10.1],[6] joten $\|S(t)\phi\|_p = \|K_t * \phi\|_p \leq \|K_t\|_1\|\phi\|_p = \|\phi\|_p$ [Youngin lause]. Youngin lauseen perusteella K_t* on jatkuva $L^p \to L^p$, joten se on eräs $S(t)$:n (lineaarinen) jatkuva laajennos; koska $\mathcal{S}$ on tiheä L^p:ssä [Prop2.3.2,s.71], jatkuva laajennos yksikäsitteinen.[7]

TAPA 2: Vastaava todistus Fourier-muunnoksilla: selvästi $\|e^{-t\xi^2}\hat{f}\|_2 \leq \|\hat{f}\|_2$, joten $f \mapsto \mathcal{F}^{-1}e^{-t\xi^2}\hat{f}$ on jatkuva normilla ≤ 1 (onhan $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$), ja lauseen [3.6.1,s.112] perusteella se on $S(t)$:n laajennos.

TAPA 3: Todista jollain muulla tavalla, että $S(t)$ on L^2-rajoitettu, ja käytä väittämää [Prop2.3.1,s.70–71].

2° *Väite: $S(t)$ on puoliryhmä L^2:lla.* Tod.: Tämä tarkoittaa, että $S(t) \in \mathcal{L}(L^2)$ $\forall t \geq 0$ [1°], $S(0) = I$ (toki, onhan TAPA 1: $e^{-0\xi^2}\hat{f} = \hat{f}$; TAPA 2: $S(0)f := u(t,\cdot) = f(\cdot)$ (alkuarvo)) ja $S(t)S(s) = S(s+t)$ (toki, onhan $\mathcal{F}[S(t)S(s)f] = e^{-t\xi^2}(e^{-s\xi^2}\hat{f}) = e^{-(t+s)\xi^2}\hat{f} = \mathcal{F}[S(t+s)f]$).[8]

3° *Väite: $S(t)$ on C_0-puoliryhmä L^2:lla.* Tod.: Vahvasti jatkuvaa puoliryhmää sanotaan historiallisista syistä [Hille–Phillips] C_0-puoliryhmäksi.[9]

Jatkuvuus normin suhteen eli tasainen jatkuvuus tarkoittaisi, että $S(\cdot) \in \mathcal{C}([0,\infty[;\mathcal{L}(L^2))$, mutta näin kivasti ei valitettavasti ole.[10]

Vahva jatkuvuus tarkoittaa pisteittäistä jatkuvuutta, ts. $S(\cdot)f \in \mathcal{C}([0,\infty[;L^2)$ $\forall f \in L^2$.[11]

TAPA 2: Todistetaan tämä:

$$\|S(t+h)-S(t)f\|_2^2 = \|\mathcal{F}[S(t+h)f - S(t)f]\|_2^2 = \int |[e^{-(t+h)\xi^2} - e^{-t\xi^2}]\hat{f}|^2\, d\xi$$

$$= \int |e^{-h\xi^2}-1|^2|e^{-t\xi^2}\hat{f}|^2\, d\xi \overset{dom.\ konv.}{\to} \int 0 = 0, \quad \text{kun } h \to 0,$$

koska $e^{-h\xi^2} - 1 \to 0$ $\forall \xi$ ja integrandilla on L^1-majorantti[12] $|2\hat{f}|^2$.

(TAPA 1: Käytetään tietoa $S(\cdot)f \in \mathcal{C}([0,\infty[;\mathcal{S})$ $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ [Th1,s.112], joten $S(\cdot)f \in \mathcal{C}([0,\infty[;L^p)$ $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (kun $1 \leq p \leq \infty$) (koska kahden jatkuvan funktion yhdiste on jatkuva ja $\mathcal{S} \to L^p$ on jatkuva), ja valitaan funktiolle $f \in L^p$ jokin $g \in \mathcal{S}$ s.e. $\|f-g\|_p < \epsilon/3$ jne. Tällöin saadaan todistus mielivaltaiselle $p \in [1,\infty[$ (tai $\mathcal{C}_0$:lle).)

4° $\mathrm{Re}\, L^2$ *on L^2:n suljettu aliavaruus.* Tod.: Jos $f,g \in \mathrm{Re}\, L^2$, niin selvästi $\alpha f + \beta g \in \mathrm{Re}\, L^2$. Jos sitten $\mathrm{Re}\, L^2 \ni f_n \to f$, niin osajono $f_{n_k}(x) \to f(x)$ m.k. x [R:RCA:3.12], joten $f(x) \in \mathbb{R}$ m.k. x (ja muualla $f(x)$ voidaan määritellä nollaksi ekvivalenssiluokan muuttumatta). Niinpä $\mathrm{Re}\, L^2$ on suljettu.

5° *Kaikki edellä L^2:lle todettu pätee myös $\mathrm{Re}\, L^2$:lle.* Tod.: Jos $f \in \mathrm{Re}\, L^2$ ja $t > 0$, niin $S(t)f = K_t * f$ on reaaliarvoinen, koska K_t on. Niinpä selvästi kaikki edellä todettu pätee $\mathrm{Re}\, L^2$:lle (tai jopa $\mathrm{Re}\, L^p$:lle tavan 1 avulla).

Tehtävä 11.3 ([Exe3.7.2] *lyhyehkö, helpohko, hyvä*):
Mikäli aaltoliikkeeseen vaikuttaa viskoosinen kitkatermi au_t ($a \geq 0$), sitä kuvaa $\mathbb{R}^{1+d}$:ssä yhtälö

$$u_{tt} - \triangle u + au_t = 0 \qquad u(0,\cdot) = f(\cdot), \quad u_t(0,\cdot) = g(\cdot).$$

[6] Oikeastaan tämä ei päde, kun $t = 0$, mutta se tapaus on helppo tutkia erikseen. (Elegantimpi tapa olisi L^1:n sijaan käyttää mittojen avaruutta M [R:RCA] ja määritellä $K_0 := \delta_0$, koska Youngin lause pätee myös mittanormille.)

[7] Jos $p = \infty$, niin $\mathcal{S}$ ei ole tiheä L^p:ssä, siksi $K_t* \in \mathcal{L}(L^\infty)$ ei välttämättä ole ainoa jatkuva laajennos, sen sijaan em. perustein $S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_0)$.

[8] Fysikaalisesti tämähän on selvää: jos kappaleen A lämpötilajakauma hetkellä 0 on f ja siksi hetkellä s se on $S(s)f$ ja hetkellä $t+s$ se on $S(t+s)f$, niin totta kai hetkellä 0 lämpötilajakaumassa $S(s)f$ olevan kappaleen lämpötilajakauma kehittyy samalla tavalla ja on siis hetkellä t muotoa $S(t+s)f$.

[9] Tämä ominaisuus siis tarkoittaa, että kappaleen lämpötilajakauma muuttuu lämmönjohtavuuden seurauksena L^2-jatkuvalla tavalla.

[10] Jos $\epsilon < 1$, niin $\|S(t) - S(0)\| > \epsilon$, vaikka $t > 0$ olisi kuinka pieni: valitsemalla $R > 0$ s.e. $e^{-tR^2} < 1 - \epsilon$ ja $\hat{f} = \chi_{[R,R+1]} \in L^2$ saadaan $\|S(t)f - f\|_2^2 = \|\mathcal{F}[S(t)f - f]\|_2^2 = \|(1-e^{-t\xi^2})\hat{f}\|_2^2 = \int_R^{R+1} |1 - e^{-t\xi^2}|^2\, d\xi > \int_R^{R+1} \epsilon^2\, d\xi = \epsilon^2$, vaikka $\|f\|_2 = 1$, siis $\|S(t) - S(0)\| > \epsilon$.

[11] Ts., $S(\cdot)f$ on (vahvasti eli L^2:n normitopologiassa) jatkuva $\forall f \in L^2$. Vastaavasti S on heikosti jatkuva joss $\forall f \in L^2$ on $S(\cdot)f \in \mathcal{C}([0,\infty[;L^2_w)$ eli kuvaus $t \mapsto S(t)f$ on heikosti jatkuva eli $t \mapsto \Lambda S(t)f$ on jatkuva $\forall \Lambda \in (L^2)^*$ [R:FA].

(Huom.: jos $\mathcal{L}(L^2)$:ssa käytetään kuvausten $\{T \mapsto Tf\}_{f \in L^2}$ indusoimaa topologiaa (“vahvaa topologiaa” eli pisteittäistä operaattoritopologiaa) (sekin on TVS-topologia), kuvaus $R : Q \to \mathcal{L}(L^2)$ on jatkuva joss se on vahvasti jatkuva; vast. kuvausten $\{T \mapsto \Lambda Tf\}_{f \in L^2,\ \Lambda \in (L^2)^*}$ indusoimaa topologia vs. heikko jatkuvuus). [TID])

[12] $|2\hat{f}|^2 \in L^1$ Hölderin (Schwartzin) epäyhtälön perusteella. Toisaalta $|e^{-(t+h)\xi^2}\hat{f}| \leq |\hat{f}|$ negatiivisillakin h (kun $t > 0$ ja $|h| < t$; tapauksessa $t = 0$ tietenkin riittää jatkuvuus oikealta).

Ratkaise tämä yhtälö (riittää ratkaista $\hat{u}$, ei tarvitse käänteismuuntaa eikä selvittää, mihin avaruuteen u kuuluu).

Vastaus: u toteuttaa tuon yhtälön joss $\hat{u}$ toteuttaa yhtälön[13]

$$\hat{u}_{tt} + a\hat{u}_t + \xi^2\hat{u} \quad \hat{u}(0,\cdot) = \hat{f}(\cdot), \quad \hat{u}_t(0,\cdot) = \hat{g}(\cdot).$$

Kullakin ξ funktio $\hat{u}(\cdot,\xi)$ toteuttaa siis vakiokertoimisen LHY:n, jonka ratkaisu on (nähdään esim. yritteellä $e^{\lambda t}$)[14]

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-at/2}[A_\xi \cos(\omega t) + A'_\xi \sin(\omega t)],$$

missä $\omega = \sqrt{\xi^2 - a^2/4}$ ja $A_\xi, A'_\xi \in \mathbb{C}$, jos $|\xi| > a/2$ (i). Jos $|\xi| = a/2$ (ii), niin $\hat{u}(t,\xi) = e^{-at/2}[B_\xi + B'_\xi t]$, ja jos $|\xi| < a/2$ (iii), niin $\hat{u}(t,\xi) = e^{(-a+\sqrt{a^2-4\xi^2})t/2}C_\xi + e^{(-a-\sqrt{a^2-4\xi^2})t/2}C'_\xi$.

(i) $\hat{u}(t,\xi) = e^{-at/2}[A_\xi \cos(\omega t) + A'_\xi \sin(\omega t)]$ ja $\hat{u}_t(t,\xi) = e^{-at/2}[-aA_\xi \cos(\omega t)/2 - aA'_\xi \sin(\omega t)/2 - \omega A_\xi \sin(\omega t) + \omega A'_\xi \cos(\omega t)]$, joten $\hat{f}(\xi) = \hat{u}(0,\xi) = A_\xi$ ja $\hat{g}(\xi) = \hat{u}_t(0,\xi) = -aA_\xi/2 + \omega A'_\xi$ eli $A'_\xi = [\hat{g}(\xi) + a\hat{f}(\xi)/2]/\omega$.

(ii) Tämä on nollamitallinen joukko kullakin t (eikä siis vaikuta käänteismuunnokseen $u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}$), joten voitaneen jättää B_ξ ja B'_ξ ratkaisematta.

(iii) Saadaan vastaavasti yhtälöparista $C_\xi + C'_\xi = \hat{f}(\xi) \wedge (-a + \sqrt{a^2 - 4\xi^2})/2C_\xi + (-a - \sqrt{a^2 - 4\xi^2})/2C'_\xi = \hat{g}(\xi)$.

[13]Oletamme, että tutkitaan ratkaisuja jossain $\mathcal{S}$, L^2, $\mathcal{S}'$ tms., jossa Fourier-muunnos on bijektio ja jossa yhtälöt ratkeavat (ts. f ja g ovat sopivia).

[14]Jos ollaan tarkkoja, niin tämän ei välttämättä tarvitse päteä ei-sileillä u, vaan ainoastaan kun t-osittaisderivaatat ovat oikeita osittaisderivaattoja (ts. kun u on tulkittavissa funktiona, ei muuna distribuutiona). Nämä siis kuitenkin pätevät, kun $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathcal{S})$ ja tiheyksiä ja jatkuvuuksia käyttämällä voitaneen vahvistaa tuloksen yksikäsitteisyys kohtuuvaivalla.