Mat-1.155 ODY:iden teoria, 1. harjoitus ma 26.1.1998 klo 14–16, U325 (3 sivua)

Oppikirjat: otteita kirjoista "Viscosity Solutions and Applications", Springer Lecture Notes 1660 [VSA] (kurssin alkupuoli, käsittelee osittaisdifferentiaaliyhtälöiden viskositeettiratkaisuja (eräs tuore ratkaisukäsite)) ja J. Rauch: "Partial Differential Equations" [Rauch] (loppupuoli, käsittelee klassisempaa teoriaa (vahvat ja heikot ratkaisut)). Kurssista voi suorittaa myös vain jommakumman puolikkaan (2 ov).

Kurssimateriaali tulee olemaan esillä (kopioitavissa) Optimin huoneen (U317) vastaavassa riippukansiossa. Harjoitustehtävät jaetaan luennoilla; niitä ja mallivastauksia voi hakea myös assistentin (Kalle.Mikkola@hut.fi) huoneen (U331) ilmoitustaululta ja vastaukset voi palauttaa samaan paikkaan ennen ko. laskuharjoituksia. Arvostelen tehtävät skaalalla 0–2, ja pistesumma on merkittävä osa arvosanaa.

Mallivastauksissa viittaan mm. Rudinin teoksiin "Principles of Modern Analysis" [R:PMA], "Real and Complex Analysis" [R:RCA] (n. luvut 1–5) ja "Functional Analysis" [R:FA]; kahden ensiksi mainitun tiedot (kurssit modernin analyysin perusteet ja funktionaalianalyysin perusteet tai muu perehtyminen epsiloneihin ja Banach-avaruuksien alkeisiin) ovat hyödyksi. Et kuitenkaan tarvitse em. kirjoja, ellet erityisesti halua lisätietoa ko. viitteistä tms. Luultavasti et tunne/muista kaikkea tämän kurssin kahden kirjan olettamaa teoriaa, mutta loput sisäistää kohtuudella kurssin edetessä (kysy tarvittaessa).

Luennot ti 14.15-16 U322, harjoitukset ma 14.15-16 U325. Kurssin Otaxin uutisryhma on puhe.matikka, jota kuitenkaan ei oleteta seurattavan (vaan ilmoitustaulujakin käytetään).

Näissä mallivastauksissa ei esitetä kaikkia yksityiskohtia tai viitteitä, osa sekundaarisista yksityiskohdista on sisällytetty alaviitteisiin. Viskositeettipuoliskossa tutkitaan lähinnä reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita (ja matriiseja) $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$, joten $A^H = A^* = \bar{A}^T = A^T$ (hermiitti eli adjungaatti saadaan transponoimalla) jne., mutta tilanteen salliessa ratkaisut esitetään tavalla, joka pätee (muissakin) kompleksiarvoisissa tapauksissa (voit siis palauttaa tehtäväsi reaalitapauksessa ratkaistuina).

Huom.: **ratkaisu** tarkoittaa kurssin alkupuoliskossa viskositeettiratkaisua, [VSA:s.8] ei klassista ratkaisua. **Maksimi** voi olla epäaito, esim. vakiofunktiolla on maksimi ja minimi joka pisteessä. **Positiivinen** matriisi ei välttämättä ole aidosti positiivinen.

Tehtävä 1.1 ([VSA:Exe0.1,s.2] *helpohko matriisialgebraharjoitus*):
Nyt kerrataan matriisialgebraa. $A^H = A^* (= A^T$ reaalisella). Sisätulo on $\langle v, y\rangle := y^H v = \bar{y}^T v = \sum_j \bar{y}_j v_j = \overline{\langle y, v\rangle}$ $(= \langle y, v\rangle$, kun reaalisia). Niinpä $\langle Av, y\rangle = y^H Av = y^H (A^H)^H v = (A^H y)^H v = \langle v, A^H y\rangle$ (selvästihän $(A^H)^H = A$ ja $(AB)^H = B^H A^H$). Positiivinen matriisi ($A \geq 0$ [VSA:p.1]) tarkoittaa neliömatriisia A, jolla sisätulo $\langle Av, v\rangle \geq 0\ \forall v$ (huom.: $A \geq 0 \iff A = A_{11} \in [0, \infty[$, kun $n = 1$). $A \geq 0 \implies A = A^H$ [R:FA:12.32b] ("itseadjungoituva", reaalitapauksessa "symmetrinen" $(A = A^T)$). $\mathrm{Tr}(A) := \sum_i A_{ii}$ (matriisin jälki (*trace*) (=ominaisarvojen summa)).

Lemma 0.0.1 *Olkoon A neliömatriisi.* $A \geq 0 \iff \mathrm{Tr}(AX) \geq 0\ \forall X \geq 0$.

Todistus: 1^o: "$\implies$": $A \geq 0 \implies A_{ii} \geq 0\ \forall i \implies \mathrm{Tr}(A) \geq 0$, koska $A_{ii} = \langle Ae_i, e_i\rangle \geq 0$. Positiivisella matriisilla A on olemassa yksikäsitteinen positiivinen neliöjuuri B $(B^2 = A)$ [R:FA:12.33]. $\mathrm{Tr}(PQ) = \mathrm{Tr}(QP)$ [Kivelä:"Matr.":teht.23a]. Niinpä $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BBX) = \mathrm{Tr}(BXB) \geq 0$, koska $BXB \geq 0$, koska $\langle BXBv, v\rangle \overset{B^H=B}{=} \langle X(Bv), (Bv)\rangle \geq 0$ (koska $X \geq 0$) ($B^H = B$, koska $B \geq 0$ [R:FA:12.32b]).[1]

2^o: "$\impliedby$": Jos jollain v olisi $0 > \langle Av, v\rangle = v^H Av$, niin valinnalla $X := vv^H$ olisi $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(Avv^H) = \mathrm{Tr}(v^H Av) = v^H Av < 0$ (koska 1×1-matriisi). Kuitenkin $X \geq 0$, koska $\langle Xa, a\rangle = a^H vv^H a = (v^H a)^H (v^H a) = \langle v^H a, v^H a\rangle = \|v^H a\|^2 \geq 0\ \forall a$, ristiriita, siis $0 \leq \langle Av, v\rangle\ \forall v$. □

Nyt itse tehtävä on helppo: $F(x, r, p, Y) - F(x, r, p, X) = -\mathrm{Tr}(A(x)Y) + \mathrm{Tr}(A(x)X) = \mathrm{Tr}(A(x)(X - Y)) \geq 0$, kun $X - Y \geq 0$ (onhan $\mathrm{Tr}(P) - \mathrm{Tr}(Q) = \mathrm{Tr}(P - Q)$) joss $A(x) \geq 0$. Tämä siis pätee kaikilla x (ja kaikilla r, p, Y, X, joilla $X - Y \geq 0$) joss $A(x) \geq 0\ \forall x$.

Tehtävä 1.2 ([Exe0.2,s.3] *helpohko, nopeahko*):
Jos funktiolla $h \in \mathcal{C}^2$ on maksimi pisteessä $a := \hat{x}$, niin $Dh(a) = 0$ ja

[1] Huom.: $A, X > 0 \not\Longrightarrow AX \geq 0$, siksi tämä piti tehdä hankalasti.

$D^2h(a) \le 0$[2]

Väite: F on aito (*proper*) joss $F(a,\psi(a),D\psi(a),D^2\psi(a)) \le F(a,\phi(a),D\phi(a),D^2\phi(a))$ $\forall \phi,\psi \in \mathcal{C}^2$, joilla $h := \phi - \psi$:llä on maksimi≥ 0 a:ssa.

Tod.: 1^o "$\Longrightarrow$": $0 = Dh(a) \Longrightarrow D\phi(a) = D\psi(a) =: p$, $0 \ge D^2h(a) = D^2\phi(a) - D^2\psi(a) =: Y - X$, $0 \le h(a) = \phi(a) - \psi(a) =: r - s$, joten $F(a,\psi(a),D\psi(a),D^2\psi(a)) \le F(a,\phi(a),D\phi(a),D^2\phi(a))$.

2^o: "$\Longleftarrow$": Olkoot a,s,r,p,X,Y annetut ja $Y \le X \wedge s \le r$. Merkitään $\phi(x) := r + \frac{1}{2}\langle Y(x-a),(x-a)\rangle$, $\psi(x) := s + \frac{1}{2}\langle X(x-a),(x-a)\rangle$, jolloin[3] $D^2\phi(x) = Y \wedge D^2\psi(x) = X$ ja $\phi(x) - \psi(x) = r - s + \langle (Y-X)(x-a),(x-a)\rangle$ saavuttaa maksiminsa$=0$ (ainakin) pisteessä a, mistä seuraa aitouden määritelmän ehto [s.2] (koska a on selvästi h:n maksimi, välttämättä $D\phi(a) = D\psi(a)$), QED.

Tehtävä 1.3 ([Exe2.2,s.9] *helpohko, nopeahko, tärkeä*):

Väite: Olkoon F degeneroidusti elliptinen (ei tarvitse olla aidosti!) ja $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Tällöin u on $F \le 0$ -ratkaisu joss $F(x,u(x),Du(x),D^2u(x)) \le 0$ $\forall x \in \Omega$. (Vast. $F \ge 0$ -ratkaisu joss ≥ 0.)

Korollaari: u on $F = 0$ -ratkaisu joss u on klassinen ratkaisu (siis klassiset ratkaisut ovat aina viskositeettiratkaisuja, mutta on olemassa myös viskositeettiratkaisuja$\notin \mathcal{C}^2$).

(Huom.: yo. tulokset pätevät funktiolle $u \in \mathcal{C}^1$, jos F on ensimmäistä kertalukua (sama todistus kelpaa).)

Tod.: (Todistetaan aliratkaisun osalta; yliratkaisu vastaavasti.)
1^o "$\Longrightarrow$": saadaan sijoituksella $\phi := u$ (sallittu, koska $u \in \mathcal{C}^2$; kaikki pisteet $u - u = 0$:n lokaaleja maksimeja).

2^o: "$\Longleftarrow$": Olkoon $a \in \Omega$ funktion $h := u - \phi$ paikallinen maksimi, $\phi \in \mathcal{C}^2$. Tällöin $Dh(a) = 0 \wedge 0 \ge D^2h(u) = D^2u - D^2\phi$, joten $F(a,u(a),D\phi(a),D^2\phi(a)) = F(a,u(a),Du(a),D^2\phi(a)) \overset{\text{elliptisyys}}{\le} F(a,u(a),Du(a),D^2u(a)) \overset{\text{oletus}}{\le} 0$, siis u on aliratkaisu, QED. (Itse asiassa vain 2^o oli tehtävänä; 1^o on tässä bonuksena.)

Tehtävä 1.4 ([Exe2.4,s.9] *keskitasoa, lyhyehkö*):

Väite: Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ avoin ja rajoitettu. Tällöin $u(x) := d(x,\partial\Omega)$ on yhtälön $|Du| = 1$ ratkaisu Ω:ssa.

Metriikan kertausta: jos X on metrinen avaruus ja $X \supset A \ne \emptyset$, niin $d(x,A) := \inf_{y\in A} d(x,y)$ on jatkuva funktio $X \to \mathbb{R}$ (tod.: $d(x,x_0) < \delta_\epsilon := \epsilon \Longrightarrow |d(x,A) - d(x_0,A)| < \epsilon$, koska $d(x,A) \le d(z,A) + d(z,x)$ jne. (tarkasta itse)).

Tod.: (Todistetaan, että u on aliratkaisu, ja jätetään pois samanlainen yliratkaisutodistus.) $u := d(x,K)$, $K := \partial\Omega$, $g(x) := u - \phi$ (huom.: u ei yleensä ole derivoituva).

Olkoon a g:n paikallinen maksimi eli $g(a) = d(a,K) - \phi(a) \ge d(x,K) - \phi(x) = g(x)$, kun $|x-a| < r$ (jollain $r > 0$). Meidän on todistettava, että $0 \ge F(a,u(a),D\phi(a),D^2\phi(a)) = |D\phi(a)| - 1$. Vastaoletus: $|D\phi(a)| > 1$. Olkoon $e := -D\phi(a)/|D\phi(a)|$ ja olkoon $\epsilon \in]0,r[$ niin pieni, että $x := a + \epsilon e \in \Omega$ ja $\phi(x) - \phi(a) < -\epsilon$ (väliarvolause tms.[4]). Tällöin $g(x) = d(x,K) - \phi(x) \ge [d(a,K) - d(a,x)] - \phi(a) + [\phi(a) - \phi(x)] > d(a,K) - \epsilon - \phi(a) + \epsilon = g(a)$, vaikka $|x-a| < r$, ristiriita, QED.

Tehtävä 1.5 ([Exe4.1,s.10] *vaikeahko, keskipitkä*):

Väite: Dirichleen probleemalla $F := u + u' - 1 = 0$, $u(0) = 0 = u(1)$ ei ole ratkaisua joukolla $\Omega :=]0,1[$.

Tod.: Tähän saattaa löytyä muitakin näppäriä ratkaisuja, ideoita? Yritetään ratkaista klassisesti: Jos f on ratkaisu ja $f \in \mathcal{C}^1$, niin tehtävän 1.2 korollaarin huomautuksen perusteella $f + f' = 1 \iff \frac{f'}{1-f} = 1$, mistä $x + C' = \int 1\,dx = \int \frac{f'}{1-f}\,dx = \int \frac{df}{1-f} = -\ln|1-f| = -\ln(1-f)$, joten

[2] Tämä nähdään esim. $\mathbb{R}^n$:n Taylorin kaavan avulla [SKK:"Vektorimuuttujan analyysi":2.6&2.7], vrt. tapaus $n = 1$, jossa $h' = 0$ ja $h'' < 0$ paljastaa (aidon) maksimin, joskin $h'' = 0$ on myös mahdollinen. Siis paikallinen maksimi $\Longrightarrow Dh = 0 \wedge D^2h \le 0$, toisaalta $Dh = 0 \wedge D^2h < 0 \Longrightarrow$ aito paikallinen maksimi (kumpikaan implikaationuoli ei käänny edes $\mathbb{R}^1$:ssä, vastaesim.: $h(x) = x^3$ ja $h(x) = x^4$). Hessen matriisin (*Hessian*) määritelmähän on $(D^2h)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}h$.

[3] Koska $f(x) := \langle Yx,x\rangle = \sum_{i,j} x_i Y_{ij} x_j \Longrightarrow D_k f(x) = \sum_i (Y_{ik}x_k + x_k Y_{ki}) \wedge D_j D_k f(x) = Y_{jk} + Y_{kj} = 2Y_{jk}$ (kun Y on symmetrinen).

[4] Onhan $[\phi(a+\epsilon e) - \phi(a)]/\epsilon \to D\phi(a)\cdot e = -|D\phi(a)| < -1$.

$1 - f = e^{-x-C'} = Ce^{-x}$, eli $f = 1 - Ce^{-x}$. $0 = f(0) \implies C = 1$, mutta tällöin $f(1) = 1 - 1/e$, siis $\nexists$ (klassista) $\mathcal{C}^1$-ratkaisua. Osoitetaan, ettei ole muutakaan (viskositeetti)ratkaisua.

Vastaoletus: Olkoon u ratkaisu (jolloin $u \in \mathcal{C}([0,1])$ [VSA:s.10]). Missä u eroaa f:stä? $g := u - f$, jolloin $g(0) = 0$, $g(1) = 1/e - 1 < 0$. Jaetaan tilanne kahteen alatapaukseen ja johdetaan kustakin ristiriita.

1^o Tapaus: $g(b) > 0$ jollain $b \in [0,1]$: Olkoon g:n maksimi $g(c) > 0$.[5] Tällöin [Def2.1] $0 \geq F(c, u(c), Df(c), D^2 f(c)) = u(c) + f'(c) - 1 = u(c) + (-f(c)) = g(c) > 0$ (koska $f' - 1 = f$ kaikkialla), siis $0 > 0$, ristiriita.

2^o Tapaus: $g(b) \leq 0\ \forall b \in [0,1]$: Valitaan $b < 1$ s.e. $g(b) < 0$[6] ja merkitään

$$\phi(x) := \begin{cases} f(x), & \text{kun } 0 \leq x < b; \\ f(x) - M(x-b)^3, & \text{kun } b \leq x \leq 1; \end{cases}$$

missä $M := (1 - 1/e)/(1-b)^3$, jolloin $\phi(1) = 0 = u(1)$. Tällöin $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ja $(u - \phi)(x) = (u - f)(x) = g(x)\ \forall x \in [0,b]$, joten funktion $h := u - \phi$ minimi on $h(c) < 0$ (koska $h(b) = g(b) < 0$) Niinpä $c \in]0,1[=: \Omega$, joten[7] $0 \leq F(c, u(c), \phi'(c), \phi''(c)) = u(c) + [\phi'(c)] - 1 = u(c) + [f'(c) - 3M(c-b)^2] - 1 = u(c) - f(c) - 3M(c-b)^2 = g(c) - 3M(c-b)^2 < 0$, RR.

---

[5] Jatkuva funktio saavuttaa kompaktissa (eli suljetussa ja rajoitetussa, kun on kyse $\mathbb{R}^N$:n osajoukosta) joukossa aina minimin ja maksimin [R:PMA].

[6] On olemassa, koska $g(1) = 1/e - 1 < 0$ ja g on jatkuva.

[7] Ehto $0 \leq F$ vaadittiin yliratkaisulta vain joukon $\Omega =]0,1[$ minimipisteissä, ja minimihän olisi voinut löytyä reunaltakin.