Mat-1.159 Harmoninen analyysi ja ..., 9. harjoitus ma 25.3.1996 klo 12–14, U325 (3 sivua)

Nyt on siirrytty kirjan [Stein] lukuun VII (s. 329–).

Kirjassa “smooth” näyttäisi tarkoittavan $\mathcal{C}^\infty$-funktiota.
"$f(t) = O(g(t))$, kun $t \to \infty$"tarkoittaa, että $\exists T, M > 0$ s.e. $|f(t)| \le Mg(t)\ \forall t > T$. (Siis olisi järkevämpää merkitä "$f(t) \in O(g(t))$, kun ...". Vast. "$f(t) = o(g(t))$ ..."tarkoittaa, että $f(t)/g(t) \to 0$ (siis $o(g) \subset O(g)$).)
(Huom. T ja M saavat riippua funktiosta f (ja g), esim. $cx^5 = O(x^6)\ \forall c \in \mathbb{C}$.)
Selvästi $O(g(t))$ ja $o(g(t))$ ovat vektoriavaruuksia.

Tehtävä 9.1 ([s.338] *keskitasoa, keskipitkä*):
Osoita, että Besselin funktion $J_m(r)$ asymptoottinen kehitelmä [(15), s. 338]

$$J_m(r) \sim r^{-1/2} e^{ir} \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{-j} + r^{-1/2} e^{-ir} \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^{-j}$$

seuraa kirjan lauseista.

Vastaus: Seuraava helppo lemma auttaa tehtävän ymmärtämistä. Kerrataan vielä ensin $\sim$:n määritelmä [s. 334]: $I(r) \sim r^{-1/k} \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{-j/k}$ joss

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^l \left[I(r) - r^{-1/k} \sum_{j=0}^{N} a_j r^{-j/k} \right] = O(r^{-l-(N+1)/k}) \qquad (r \to \infty).$$

Lemma 0.0.1 *Olkoon $k \in \mathbb{N}_+$. Jos $f(r) \sim r^{-1/k} \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{-j/k}$ ja $g(r) \sim r^{-1/k} \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{-j/k}$, merkitään $f \approx g$ (selvästi ekvivalenssirelaatio).*

(a) $\{a_j\}$ on yksikäsitteinen eli jos $r^{-1/k} \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{-j/k} \sim f(r) \sim r^{-1/k} \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^{-j/k}$, niin $b_j = a_j\ \forall j$.

(b) $f \approx g$ joss $(\frac{d}{dr})^l [f - g] = O(r^{-N})\ \forall N, l \in \mathbb{N}_0$ ja $f(r) \sim r^{-1/k} \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{-j/k}$ jollain $\{a_j\}$.

(c) $f \approx g \wedge F \approx G \wedge l \in \mathbb{N}_0 \implies \alpha f + \beta F \approx \alpha g + \beta G \wedge \bar{f} \approx \bar{g} \wedge r^{-l/k} f \approx r^{-l/k} g$.

Todistus: Tämä $\sim$ määritellään kaavassa [(8)] sivulla 334.
($\approx$ on siis ekvivalenssirelaatio niiden f joukossa, jotka ovat $\sim$ jokin $\sum$.)
(a) Jos sitten olisi olemassa pienin $N \in \mathbb{N}_0$, jolla $a_N \ne b_N$, niin olisi $O(r^{-(N+2)/k}) \ni [f - \sum^{N+1}] - [f - \sum^{N+1}] = r^{-1/k}(a_N - b_N) r^{-N/k} + r^{-1/k}(a_{N+1} - b_{N+1}) r^{-(N+1)/k}$ [(8)], mikä olisi totta joss $a_N = b_N$, RR, QED.
(b) $(\frac{d}{dr})^l [f - g] = (\frac{d}{dr})^l \{[f - \sum] - [g - \sum]\} \in O(r^{-l-(N+1)/k})$ joss $(\frac{d}{dr})^l [g - \sum] \in O(r^{-l-(N+1)/k})$ (eli $g \sim \sum$), koska $(\frac{d}{dr})^l \{[f - \sum]\} \in O(r^{-l-(N+1)/k})$.
(c) Kohdan (b) perusteella väitteen todistavat sarjat saadaan selvästi funktioiden f, g, F, G sarjoista, koska $(d/d\lambda)^l$ on lineaarinen ja $\alpha O + \beta O \subset O$ etc.
$\square$

Unohdetaan $1/2\pi$; sillähän vain tarvitsee kertoa a_j:t ja b_j:t.

$$2\pi J_m(r) := \int_0^{2\pi} e^{ir \sin t} e^{-imt}\, dt =: e^{ir} \int_0^{2\pi} e^{ir\phi(t)} \psi(t)\, dt,$$

missä $\phi(t) := \sin t - 1$ (jolloin $\phi(\pi/2) = 0 = \phi'(\pi/2)$) ja $\psi(t) := e^{-imt}$.
Jos $K \subset_K \Omega \subset_\circ \mathbb{R}^d$, on olemassa $\phi \in \mathcal{D} := \mathcal{C}_0^\infty$ s.e. $K \prec \phi \prec \Omega$, i.e., $\chi_K \le \phi \le \chi_\Omega$ (esim. [R2:2.12]&[Adams:2.18a]). Niinpä voidaan valita $f_1, f_2 \in \mathcal{D}$ s.e. $\{[\pi/2 - \delta/2, \pi/2 + \delta/2]\} \prec f_1 \prec]\pi/2 - \delta, \pi/2 + \delta[$ ja $\{[3\pi/2 - \delta/2, 3\pi/2 + \delta/2]\} \prec f_2 \prec]3\pi/2 - \delta, 3\pi/2 + \delta[$ (riittävän pienellä $\delta > 0$ (ao. lauseiden vaatimusten mukaan)). $f_3 := 1 - f_1 - f_2 \in \mathcal{C}^\infty$. $\psi_k := f_k \psi$, jolloin $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$.
Nyt [Prop. VIII.1.3 (s.334)] arvolla $k = 2$ pätee

$$\int_0^{2\pi} e^{ir\phi(t)} \psi_1(t)\, dt \sim r^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} a'_l r^{-l/2} = r^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{-j},$$

missä "="saadaan sijoituksella $j := 2l$, koska $a_{2l+1} = 0\ \forall l \in \mathbb{N}$ [1.3.4.2 (s.337)].[1] Vastaavasti toinen termi saadaan ψ_2:n integraalista (siinä vain sovelletaan kaavaa $e^{ir \sin t} = e^{-ir} e^{ir\phi_2(t)}$, missä $\phi_2(t) = \sin t + 1$), on siis

[1] Tästä siis saadaan ensimmäinen termi. e^{ir}:n laittamisella sellaisenaan summalausekkeeseen lienee tarkoitettu, että kyseinen termi jaettuna e^{ir}:llä on ekvivalentti summalausekkeen kanssa.

enää osoitettava ~ 0:ksi integraali

$$\int_0^{2\pi} e^{ir\phi(t)}\psi_3(t)\,dt.$$

Se on onneksi $O(r^{-N})$ $\forall N \in \mathbb{N}_0$ [Prop.VIII.1.1]:n ja sen kommenttien perusteella: sovelletaan ko. väittämää väleillä $[0, \pi/2-\delta/3]$, $[\pi/2+\delta/3, 3\pi/2-\delta/3]$ ja $[3\pi/2+\delta/3, 2\pi]$, jolloin tulos on muuten $O(r^{-N})$, mutta pisteissä 0 ja 2π jää termejä, jotka kumoavat toisensa, koska $\sin t$ derivaattoineen on jaksollinen (vrt. sivun 331 lopun kommentit). Jos $I_3(r)$:ää derivoidaan, niin ψ_3 tulee vain kerrotuksi $i\sin t$:llä, mikä ei poista siltä em. ominaisuuksia, joten myös $(d/dr)^l I_3(r) \in O(r^{-N})$ $\forall N, l$; siis todellakin $I_3(r) \sim 0$ [Lemma (b)], QED.

Tehtävä 9.2 ([s. 336] *helpohko, nopeahko*):
Osoita, että jos $g \in \mathcal{S}$ ja $g(x) = 0$ $\forall x \in [-\delta, \delta]$ jollain $\delta > 0$, niin $\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} g(x)\,dx = O(\lambda^{-N})$ $\forall N \geq 0$.

Vastaus: Vihje: ks. ratkaisun tiivistelmä ja laske itse
Ratkaisun tiivistelmä:
1^o Voidaan olettaa $g(x) = 0$ $\forall x \leq \delta$.
2^o Sovelletaan N kertaa kaavaa $\int_{\mathbb{R}} (De^{i\lambda x^2}) f = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} D^T f$ ja todetaan tuloksen olevan summa $O(\lambda^{-N})$-termeistä.

1^o Yleisessä tapauksessa $g(x) = g_1(x) + g_2(-x)$, missä $g_1, g_2 \in \mathcal{S}$ ovat tällaisia ($g_2(x) := g(-x)\chi_{\mathbb{R}_+}(-x)$, $g_1 := g - g_2$), joten muuttujanvaihdolla $y = -x$ saadaan $\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} g(x)\,dx = \int_\delta^\infty e^{i\lambda x^2} g_1(x)\,dx + \int_\delta^\infty e^{i\lambda y^2} g_2(y)\,dy = O(\lambda^{-N})$.

2^o $Df := f'/2i\lambda x$, $D^T f := (-2i\lambda)^{-1}\partial(f/x)$, jolloin $De^{i\lambda x^2} = e^{i\lambda x^2}$. Jos $f \in \mathcal{S}$ ja $f(x) = 0$ $\forall x \leq \delta$, niin $\int (De^{i\lambda x^2}) f(x) = \int e^{i\lambda x^2} D^T f(x)$, koska

$$\int_\delta^\infty De^{i\lambda x^2} f(x)\,dx = (2i\lambda)^{-1} \int_\delta^\infty (\partial e^{i\lambda x^2}) f(x)/x\,dx$$

$$= (2i\lambda)^{-1} \Big|_\delta^\infty e^{i\lambda x^2} f(x)/x - (2i\lambda)^{-1} \int_\delta^\infty e^{i\lambda x^2} \partial[f(x)/x]\,dx$$

$$= \int_\delta^\infty e^{i\lambda x^2} D^T f(x) = (-2i\lambda)^{-1} \int_\delta^\infty e^{i\lambda x^2} [f'(x)/x - f(x)/x^2]\,dx.$$

Induktion avulla nähdään, että $((D^T)^N g)(x)$ on summa termeistä muotoa $\lambda^{-N} a_{N,k,j} g^{(k)}/x^j$ (joillain $k, j \leq 2N$). Toisaalta $|\int_\delta^\infty e^{i\lambda x^2} \lambda^{-N} a_{N,k,j} g^{(k)}/x^j\,dx| \leq \lambda^{-N} a_{N,k,j} \int_\delta^\infty |g^{(k)}/x^j|\,dx \leq \lambda^{-N} a_{N,k,j} \delta^{-j} \|g^{(k)}\|_1 =: C_{N,k,j}\lambda^{-N}$, koska $g^{(k)} \in \mathcal{S} \subset L^1$. Niinpä tällaisten summa

$$\int_\delta^\infty e^{i\lambda x^2} g(x)\,dx = \int_\delta^\infty (D^N e^{i\lambda x^2}) g(x)\,dx = \int_\delta^\infty e^{i\lambda x^2} (D^T)^N g(x)\,dx$$

on itseisarvoltaan $\leq \lambda^{-N} \sum_{k,j \leq 2N} C_{N,k,j}$, siis $O(\lambda^{-N})$, QED.

Tehtävä 9.3 ([s. 347–348] *helpohko, nopeahko*):
(a) Osoita yksityiskohtaisesti, että jos S^{n-1} on yksikköpallon kuori $\subset \mathbb{R}^n$ ja σ on Lebesguen mitan S^{n-1}:een indusoima mitta ("pinta-ala", kun $n = 3$, etc.), niin σ:n Fourier-muunnos toteuttaa kaavan $|\widehat{d\sigma}(\xi)| = O(|\xi|^{(1-n)/2})$ ($|\xi| \to \infty$). (b) Selitä, mikä tässä oli yllättävää.

Vastaus: Tässä siis täsmennetään s. 347–348. [2]

[2] "μ on funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ määräämä $\mathbb{R}^n$-Borel-mitta"eli "$d\mu = f\,dm$ ..."tarkoittaa, että $\nu(E) = \int_E f\,dm := \int_E f(x)\,dx$ $\forall E$. Tällöin voidaan osoittaa, että $\int g\,d\nu = \int gf\,dm$ [R2:1.29etc.]. Niinpä tällaisen mitan Fourier-muunnokselle pätee $\widehat{d\nu} = \hat{f}$, kun määritellään $\widehat{d\nu} := \gamma \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\,d\nu(x)$; vastaavasti Steinin Fourier-muunnoksen määritelmälläkin. $\int_E f(x)\,d\nu(x) := \int_E f\,d\nu$; tuo (x) vain täsmentää, että x on integrointimuuttuja (eikä esim. ξ).

Huom. $\gamma\widehat{d\sigma}(2\pi\xi) =: \widetilde{d\sigma}(\xi)$, missä $\widetilde{d\sigma}$ on Rauch-tyylinen Fourier-muunnos (se määritellään mitoille aivan kuten (L^1-)funktioillekin). Niinpä asymptoottiset käyttäytymiset ja melkein kaikki muutkin asiat ovat samanlaisia kaikille Fourier-muunnoksille (eroja vain vakiokertoimissa etc.).

Lebesguen mitan indusoima σ viittaa tehtävään [R2:Exe8.6], josta näkee mm., että $\sigma_0 = \delta_1 + \delta_{-1}$, missä $\delta_a(E) := \chi_E(a)$ (ts. mitta jolla on ykkönen pisteessä a).
Jokainen äärellinen Borel-mitta $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ voidaan samaistaan distribuutioon, $\mathcal{S}' \ni T_\mu : \phi \mapsto \int \phi\,d\mu$, jolloin δ_a-mitta samaistuu tuttuun Rauchin δ_a-distribuutioon (mikä oikeuttaa saman merkinnän).

Kun ξ on annettu, sijoitetaan pallokoordinaatiston "pohjoisnapa"sen suuntaiseksi, ts. merkitään $\theta := \theta_1$:llä ξ:n ja x:n välistä kulmaa. Tällöin

$$\widehat{d\sigma}(\xi) := \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i x\xi}\, d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i|\xi||x|\cos\theta}\, d\sigma(x),$$

missä $|x|$ voidaan unohtaa yksikköpallolla. Koordinaatiston kierto ei vaikuta integraaliin (tämä nähdään niin intuitiolla kuin muuttujanvaihdolla $x = Ay$, missä A on kiertomatriisi (jolloin sen (Jacobin) determinantti on 1)), joten voidaan olettaa x_n- ja ξ_n-akselit ξ:n suuntaisiksi.[3]

Siis $d\sigma := d\sigma_{n-1} = (\sin\theta)^{n-2}\, d\sigma_{n-1}$ (tämä pätee pallokoordinaateille, esim. $n = 3 \implies \int_{S^2} f(x)\, d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) r\sin\theta\, d\phi\, d\theta$, missä $r = 1$). Sijoitetaan tämä Fourier-muunnokseen

$$\widehat{d\sigma}(\xi) := \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i|\xi||x|\cos\theta}\, d\sigma(x) = \int_0^\pi \int_{S^{n-2}} e^{-2\pi i|\xi|\cos\theta}(\sin\theta)^{n-2}\, d\sigma_{n-2} d\theta$$

$$= |\sigma_{n-2}| \int_0^\pi e^{-2\pi i|\xi|\cos\theta}(\sin\theta)^{n-2}\, d\theta$$

(merkitään $r := 2\pi|\xi| \wedge t := -\cos\theta \wedge m = n/2 - 1$, jolloin $d\theta/dt = (dt/d\theta)^{-1} = (\sin\theta)^{-1} = (1-t^2)^{-1/2}$ (kun $\sin\theta \geq 0$, siis $\theta \in [0,\pi]$))

$$= |\sigma_{n-2}| \int_{-1}^1 e^{irt}(1-t^2)^{(n-2)/2}(1-t^2)^{-1/2}\, dt = |\sigma_{n-2}| \int_{-1}^1 e^{irt}(1-t^2)^{m-1/2}\, dt,$$

Niinpä $\widehat{d\sigma}(\xi) = a_m r^{-m} J_m(r)$ [(16) (s.338)]. Toisaalta [s. 338] kaava (15) pätee myös kun $m \in \mathbb{N}_0/2$. Kaavan [(15)] mukaan $J_m(r) = O(r^{-1/2})$ eli $|J_m(r)| \leq M r^{-1/2}$, joten $|\widehat{d\sigma}(\xi)| \leq M' r^{-m} r^{-1/2} = M' r^{-(n-1)/2} = M''|\xi|^{(1-n)/2}$, ts. $|\widehat{d\sigma}(\xi)| = O(|\xi|^{(1-n)/2})$ (suurilla $|\xi|$).

Tapauksessa $n = 1$ eli $m = -1/2$ on $|\mathcal{F}\sigma| = |\mathcal{F}[\delta_1 + \delta_{-1}]| = |e^{-2\pi i\xi} + e^{2\pi i\xi}| = |2\cos 2\pi\xi| \leq 2 = O(1)$).

[3] $\mathbb{R}^n$:n pallokoordinaatit ovat $\mathbb{R}^3$:n vastaavien luonnollinen yleistys: $r_k := \sqrt{\sum_{j=1}^k x_j^2}$, $r := r_n$, $\theta_1 := \overline{\arccos}\, x_n/r$, $\theta_2 := \overline{\arccos}\, x_{n-1}/r_{n-1}$, ... (ts. θ_k on x_{n+1-k}-akselin ja x:n $\mathbb{R}^{n+1-k}$-projektion välinen kulma $\in [0,\pi]$, paitsi että θ_{n-1} valitaan kuten ϕ napakoordinaateissa (ja $\mathbb{R}^3$:n pallokoordinaateissa) (tai $\pi/2 - \phi$)). Tästä voidaan muuttujanvaihdolla ja Jacobin determinantin avulla laskea induktiolla kirjan kaavan ($d\sigma$ sivulla 348) tavallisille funktioille; kaikille $L^1(\sigma)$-funktioille se yleistyy vaikkapa tiheyden perusteella. Tällöin siis $x_n = r\cos\theta_1$, $x_{n-k} = r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_k \cos\theta_{k+1}$ (paitsi arvolla $k = n-1$ (ja $k = n-2$, jos "$\theta_{n-1} := \phi$")).