**Mat-1.159 Harmoninen analyysi ja ..., 8. harjoitus ma 18.3.1996 klo 12–14, U325 (2 sivua)**

Tällä kertaa tehtävät on käsitelty tarkimmat yksityiskohdat sivuuttaen – eksaktit ratkaisut olisivat paikoin hyvin pitkiä.

**Tehtävä 8.1** ( ):
(a) Ratkaise $u_{tt} = c^2\triangle u$, arvoilla $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^3$ alkuehdoilla $u(0,x) \equiv 0 =: f$, $u_t(0,x) = \chi_{|x|<a} =: g$, missä $a > 0$. (b) Onko $u$ jatkuva kaikkialla?

**Vastaus:**

Rotaatioinvariantin ongelman ratkaisu saadaan seuraavasti: valitaan jokin $x$:n suhteen pariton $v_{tt} - v_{xx} = 0$:n ratkaisu $\mathbb{R}^1$:ssä ja merkitään $u(t,x,y,z) := v(t,r)/r$ (missä $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\bar{x}|$) [Th4.6.2 (s.154)]. Nyt vaaditaan $0 = u(0,\bar{x}) = v(0,r)/r$ ja $\chi_{[-a,a]}(r) = u_t(0,\bar{x}) = v_t(0,r)/r$, joten valitaan $v(0,x) = 0 \wedge v_t(0,x) = x\chi_{[-a,a]}(x)$, jolloin ratkaisu [s. 151 (3)] (pitäisi kertoa sgn $t$:llä, ellei olisi $t > 0$)

$$v(t,x) = [K_1(t) * (\cdot\chi_{[-a,a]}(\cdot))](x) = \frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}} y\chi_{[-a,a]}(y)\chi_{[-ct,ct]}(x-y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}} y\chi_{[-a,a]}(y)\chi_{[x-ct,x+ct]}(y)\,dy = \frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}} y\chi_{[\max(-a,x-ct),\min(a,x+ct)]}(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{\max(-a,x-ct)}^{\min(a,x+ct)} y\,dy = \frac{1}{2c}\Big|_{\max(-a,x-ct)}^{\min(a,x+ct)} y^2/2\,dy$$

$$= \{[\min(a,x+ct)]^2 - [\max(-a,x-ct)]^2\}/4c$$

on pariton (minkä näkee esim. muuttujanvaihdon $y = -z$ avulla ensimmäisessä integraalissa). Niinpä $u := v/r$ on ratkaisu – selvästi se on rotaatioinvariantti (vain $r$:n funktio) ja edellä todettiin alkuarvojen täsmäävän. Siis

$$u(t,\bar{x}) = v(t,r)/r = \{[\min(a,r+ct)]^2 - [\max(-a,r-ct)]^2\}/4rc,$$

mikä ei selvästikään ole jatkuva kaikkialla.[1]

**Tehtävä 8.2** ([Th4.8.2] *helpohko, nopeahko*):
Käyttäen "*Method of Descent*"*($d = 2 \to d = 1$), johda lauseesta 2 [s. 164] d'Alembertin kaava.*

**Vastaus:** *Jäljitellään lauseen [4.8.2] todistusta [s.163–164]:.*
*Olkoon $\pi$ projektio $(x,y) \mapsto x$. Väittämän [4.8.1,s.163] mukaan reunaehdot ovat nyt $F(x,y) = (f\circ\pi)(x,y) = f(x)$ ja $G(x,y) = g(x)$ sekä $w(t,x,y) = u(t,x)$ $\forall x,y,t$. Jos $f = 0$, niin ratkaisu on $u(t,\cdot) = K_1(t) * g$. Niinpä $(K_2(t) * G)(x,y) = w(t,x,y) = u(t,x) = (K_1(t) * g)(x)$. $K_2(t,x,y) = \frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\chi_{|\cdot|<R}(\bar{x})$, missä $R := c|t|$ [4.8.2], joten*

$$w(t,0,0) = (K_2(t) * G)(\bar{0}) = \int_{\mathbb{R}^2} G(\bar{x})K_2(t,\bar{0}-\bar{x})\,d\bar{x}$$

$$= \int_{|\bar{x}|<R} g(x)\frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,d\bar{x}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c}\int_{|\bar{x}|<R} g(x)\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,d\bar{x}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c}\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} g(x)\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dy\,dx$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c}\int_{-R}^{R} g(x)\pi\,dx = \frac{\operatorname{sgn} t}{2c}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-ct,ct]}g(x)\,dx$$

*(koska $\int (r^2-y^2)^{-1/2}\,dy = \arcsin(y/r) + C$). $w(t,0,0) = u(t,0) = (K_1(t) * g)(0) = \int_{\mathbb{R}} K_1(t,0-x)g(x)\,dx$, joten $K_1(t,x) := \frac{\operatorname{sgn} t}{2c}\chi_{[-ct,ct]}(x)$ ratkaisee yhtälön $\mathbb{R}^1$:ssä (huom. sgn $t$:n unohtuminen [s.151]).*

[1] Se, että $u$ on aaltoyhtälön ratkaisu, on todistettu vain sileille $g$ [Th4.6.2 (s.154)]; jos merkitään $v_n := v * J_{1/n}$, missä $J$ on parillinen $\mathbb{R}^1$-siloittajajono (*mollifiers*), myös $v_n$ on pariton ja voidaan todistaa niiden ratkaisujen $u_n$ suppenevan $u$:hun. Jos nyt osoitetaan $\{u_n\}$:n olevan myös $\mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$-Cauchy-jono, voidaan päätellä $(\partial_t^2 - \triangle)u = (\partial_t^2 - \triangle)\lim_n u_n = \lim_n(\partial_t^2 - \triangle)u_n = \lim_n 0 = 0$, joten $u$ on ratkaisu distribuutiomielessä, siis yksikäsitteisyyden nojalla myös yleistetty ratkaisu.

**Tehtävä 8.3** *([s.135/s.167] ):*
*Johda Duhamel-tyyppinen kaava lämpöyhtälölle tapauksessa $d = 2$.*

**Vastaus:** *Lämpöyhtälön ratkaisuoperaattori $S_H(t)$ on muotoa $K_H(t) * f$, missä $\hat{K}_H(t) = \gamma e^{-ct\xi^2}$. $\partial_t \hat{K}_H = -c\xi^2 \gamma e^{-ct\xi^2} = \mathcal{F} c \triangle K_H$, joten $K'_H := \partial_t K_H = c\triangle K_H$. Niinpä Duhamelin kaava [s.134 (6)]*

$$u(t) = \int_0^t S_H(t-s) w(s)\, ds = \int_0^t K_H(t-s) * w(s)\, ds$$

*ratkaisee lämpöyhtälön:*[2] $u_t(t) = K_H(t-t) * w(t) + \int_0^t K'_H(t-s) * w(s)\, ds = \delta * w(t) + \int_0^t (-c\triangle) K_H(t-s) * w(s)\, ds = w(t) - c\triangle u(t)$, *QED.*
*(Tekniset yksityiskohdat (sivuutetaan) eivät ole helppoja.)*

**Tehtävä 8.4** *([4.8]* keskitasoa,*):*
*Ratkaise $u_{tt} - \triangle u = w(t, x, y, z)$, missä $t > 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $u(t = 0) \equiv 0$, $u_t(t = 0) \equiv 0$, $w = \chi_{[0,1]}(t)\chi_{[0,1]}(r)$ $(r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.*

**Vastaus:** *Ratkaisu on $u(t) = \int_0^t K_W(t-s) * w(s)\, ds = \int_0^t K_W(s) * w(t-s)\, ds$ (Bochner-integraali, ts. $H^s$-arvoisen (tms.) funktion "tavallinen" integraali). Nyt $F(t, s) := K_W(s) * w(t-s)$ on ratkaisu hetkellä $s$ alkuarvolla "$u_t = w(t - s)$", siis tehtävässä 8.1 laskettu*

$$F(t,s)(r) = \chi_{\max(t-1,0)<s<t} \{[\min(1, r + cs)]^2 - [\max(-1, r - cs)]^2\}/4rc,$$

*missä $r := |x|$ (siis $F(t, s)$ on funktio (tai distribuutio)). Niinpä*

$$u(t, \bar{x}) = \int_{\max(t-1,0)}^t \{[\min(1, r + cs)]^2 - [\max(-1, r - cs)]^2\}/4rc\, ds.$$

*Tulosta voisi sieventää esim. laskemalla sen alatapauksittain ($t < 1$, $t > 1$, $r + cs > 1$, ...). Lisäksi tulisi osoittaa, että tämä pisteittäin laskettu integraali todella tuottaa oikea ratkaisun (esim., että Bochner-integraali voidaan nyt laskea pisteittäin).*

*Huom.: tässä $u_t$ ja $u$ ovat nollia hetkellä $t = 0$; muunlaiset alkuarvot saadaan lisäämällä ne toteuttava homogeenisen yhtälön ($w = 0$) ratkaisu.*

[2] Voidaan todistaa (vrt. [s.134–135]), että

$$\partial_t \int_{a(t)}^{b(t)} F(t,s)\, ds = b'(t)F(t, b(t)) - a'(t)F(t, a(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} F_t(t,s)\, ds$$

tietyillä edellytyksillä (myös Bochner-integraaleissa) [TID].