Mat-1.159 Harmoninen analyysi ja ..., 6. harjoitus ma 4.3.1996 klo 12–14, U325 (4 sivua)

Huom.: Tehtävän 5.2 olisi voinut ratkaista helpomminkin: vähenevyys seuraa lauseesta [Rauch:3.6.4] ja korvaamalla $|u|^{3/2} \mapsto |\epsilon + u|^{3/2}$ sekä antamalla epsilonin mennä nollaan [Rauch:Example3.6.4].

Tehtävä 6.1 ([s. 118] *helpohko, nopeahko*):
D^s avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sulkeuma normin $\|u\|_{D^s} := \|\nabla_x u\|_{H^{s-1}}$ suhteen [Rauch: s. 118]. Onko se hyvin määritelty Hilbert-avaruus?

Vastaus: Vastaus on kyllä, kuten kohdat 1^o–3^o osoittavat.
(Tehtävässä $\nabla_x := \nabla := (\partial_{x_1},\ \partial_{x_2},\ \cdots,\ \partial_{x_d})^T$; alaindeksi x vain kertoo, että derivoinnit x:n komponenttien suhteen (ei siis tietenkään t:n suhteen).)

Olkoon X vektoriavaruus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ normilla $\|u\|_X := \|\nabla_x u\|_{H^{s-1}}$.

Ratkaisun tiivistelmä:
1^o Todistetaan, että $\|\cdot\|_X$ on normi avaruudessa X (ts. avaruudessa $\mathcal{S}$).
2^o Etsitään sisätulo $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{C}$, jonka määräämä normi $\|\cdot\|_X$ on (ts. $\|u\|_X = \sqrt{(u,u)_X}$).
3^o Todetaan, että on olemassa yksikäsitteinen (modulo isometrinen isomorfismi) Hilbert-avaruus, jonka tiheä aliavaruus X on.
(Tätä Hilbert-avaruutta sanotaan $\mathcal{S}$:n sulkeumaksi normin $\|\cdot\|_X$ suhteen.)

1° Todistetaan, että X on normiavaruus: $\nabla u = (\partial_{x_1}u,\ \partial_{x_2}u,\ \cdots,\ \partial_{x_d}u)^T$, joten sen muunnos (millä tarkoitetaan muunnosta komponenteittain) on $(\mathcal{F}\nabla_x u)_k = \mathcal{F}\partial_{x_k}u = i\xi_k\hat{u}$. Niinpä $|(\mathcal{F}\nabla_x u)(\xi)| = \sqrt{\sum_k |i\xi_k\hat{u}(\xi)|^2} = \sqrt{\sum_k |\xi_k|^2|\hat{u}(\xi)|^2} = |\xi||\hat{u}(\xi)|$ (*). Vektoriarvoisen funktion L^p-normi määritellään kuten skalaariarvoisenkin:

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d,B)} := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\, dx,$$

missä $|f(x)|$ on $f(x)$:n pituus avaruudessa $B = \mathbb{C}^n$.[1]

$$\|u\|_X^2 := \|\nabla_x u\|^2_{H^{s-1}} := \|\langle\xi\rangle^{s-1}\mathcal{F}\nabla_x u\|_2^2 := \int \langle\xi\rangle^{2s-2}|\mathcal{F}\nabla_x u|^2\, d\xi$$

$$:= \int \xi^2\langle\xi\rangle^{2s-2}|\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi \le \int \langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}|^2\, d\xi = \|u\|^2_{H^s} < \infty,$$

jos $u \in H^s$, joten normi on äärellinen, kun $u \in \mathcal{S} \subset H^s$. 0. Normi on siis kuvaus $\mathcal{S} \to [0,\infty[$.
1. $\|\alpha u\|_X := \|\nabla_x \alpha u\|_{H^{s-1}} = |\alpha|\|\nabla_x u\|_{H^{s-1}}$, kun $\alpha \in \mathbb{C}$.
2. $\|u+v\|_X = \|\nabla_x(u+v)\|_{H^{s-1}} = \|\nabla_x u + \nabla_x v\|_{H^{s-1}} \le \|\nabla_x u\|_{H^{s-1}} + \|\nabla_x v\|_{H^{s-1}} = \|u\|_X + \|v\|_X$.
3. $\|u\|_X = 0 \iff |\hat{u}(\xi)|^2 = 0\ \forall\xi \ne 0 \iff \hat{u} \equiv 0 \iff u = 0$ (kun $u \in \mathcal{S}$).
Siis $\|\cdot\|_X$ on normi avaruudessa X, ts. X on normiavaruus.[2]

[1] Kuriositeetti: Jos f:n arvot ovat jossain ääretönulotteisessa Banach-avaruudessa B (ainoat äärellisulotteiset normiavaruudet ovat $\mathbb{R}^d$ ja $\mathbb{C}^d$ ($d \in \mathbb{N}_0$) [R3:1.21]), niin Banach-avaruus $L^p(\mathbb{R}^d, B)$ (tai $L^p(X,B)$, missä X on jokin muu mitta-avaruus) määritellään samalla tavalla, silloin vektorin $f(x)$ pituus on $|f(x)| := \|f(x)\|_B$.

$\mathbb{C}^d$- (tai $\mathbb{R}^d$-) arvoisten funktioiden **mitallisuus** on helppo määritellä: funktion komponenttifunktioiden on oltava mitallisia. B-tapauksessa mitallisiksi ("vahvasti mitallisiksi") määritellään ne f, joilla $f_n(x) \to f(x)$ m.k. $x \in X$ jollain mitallisten numeroituva-arvoisten funktioiden jonolla (siis $f_n(x) := \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,j}\chi_{E_{n,j}}$, missä $i \ne j \implies E_{n,j} \cap E_{n,i} = \emptyset$ ja $E_{n,j} \in \mathfrak{M}\ \forall j,n$). Jos $B = \mathbb{C}$ (tai $\mathbb{C}^d$), nämä ovat juuri tutut [R1:11.13] mitalliset funktiot, minkä todistaminen ei ole aivan triviaalia. Jos B on separoituva, mitallisia ovat täsmälleen heikosti mitalliset funktiot (ne f, joilla $\Lambda f : X \to \mathbb{C}$ on mitallinen $\forall f \in B^*$); mitalliset funktiot ovat aina heikosti mitallisia. Yksinkertaisten L^p-funktioiden ($s = \sum_{j=0}^{n} b_j\chi_{E_j}$, $E_j \in \mathfrak{M}\ \forall j$) joukko on tiheässä L^p:ssä, kun $1 \le p < \infty$, ja $I : s \mapsto I(s) := \int_X s\, d\mu := \sum_j b_j\mu(E_j) \in B$ on jatkuva (sen normi on yksi) ja lineaarinen, joten I laajenee yksikäsitteisesti kuvaukseksi $L^1(X,B) \to B$ [Rauch:Prop2.3.1]; tästä käytetään nimitystä **Bochner-integraali**.

Em. konstruktio voi näyttää hankalalta, mutta käytännössä Bochner-integrointi on aivan samanlaista kuin Lebesgue-integrointi (ja ne ovat sama asia, jos $B = \mathbb{C}$ (tai $\mathbb{C}^d$ tai $\mathbb{R}^d$)). Tarkemmin: [TID] (yllekirjoittaneen diplomityö: "Integrointi ja derivointi topologisissa vektoriavaruuksissa").

[2] Avaruudessa H^s em. kuvaus on seminormi, muttei välttämättä normi (koska $\|c\| := \|\nabla_x c\|_{H^s} = \|0\|_{H^s} = 0$ ja vakiofunktio $c \in H^s$ pienillä s).

2° X on sisätuloavaruus: $\|u\|_X^2 = \int \xi^2\langle\xi\rangle^{2s-2}|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi = (u,u)_X$, kun merkitään

$$(u,v)_X := \int \xi^2\langle\xi\rangle^{2s-2}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi.$$

Selvästi $(\cdot,\cdot)_X$ täyttää sisätulojen aksioomat [R2:4.1].[3]

3° Jokainen metrinen avaruus voidaan täydellistää yksikäsitteisesti. Tarkemmin: jos X on metrinen avaruus, niin on olemassa täydellinen metrinen avaruus $\hat{X}$ s.e. X on sen tiheä aliavaruus (ts. X on $\hat{X}$:n tiheä osajoukko ja metriikat yhtyvät X:ssä ($\hat{d}(x,y) = d(x,y)\ \forall x,y \in X$)) [R1:Exe3.24].

$\hat{X}$ on yksikäsitteinen modulo isometrinen bijektio, ts. jos myös Y on kuten yllä, niin on olemassa isometrinen bijektio ("luonnollinen samaistus") $I : \hat{X} \to Y$ s.e. $I(x) = x\ \forall x \in X$ (ja $d(I(x), I(y)) = d(x,y)\ \forall x,y \in \hat{X}$).

Jos X on normiavaruus, niin myös $\hat{X}$ on (saman normin yksikäsitteisellä laajennuksella $\|x\|_{\hat{X}} := \lim_n \|x_n\|_X$, missä $x_n \to x$).
Jos X on sisätuloavaruus, niin myös $\hat{X}$ on (saman sisätulon yksikäsitteisellä laajennuksella); siis tehtävämme tapauksessa $\hat{X}$ on täydellinen sisätuloavaruus eli **Hilbert-avaruus**. [4]

Tehtävä 6.2 ([3.7] *helpohko, nopeahko, hyvä*):
Mikäli aaltoyhtälö $u_{tt} - c^2\triangle u = 0$ Fourier-muunnetaan ja ratkaistaan, saadaan [Rauch:3.7]

$$\hat{u} = \hat{f}(\xi)\cos(c|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\sin(c|\xi|t)/c|\xi|,$$

missä $u(0,\cdot) = f(\cdot)$ ja $u_t(0,\cdot) = g(\cdot)$. Olkoon $d = 1$. Käänteismuunna $\hat{u}$.

[3] Voidaan todistaa, että normiavaruus on sisätuloavaruus (ts. jonkin sisätulon määräämä) joss se toteuttaa suunnikaslain (*parallelogram law*) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Tämän olisi voinut laskea yllä. Ko. sisätulo on tällöin 1-käs.

[4] Lukijassa voi herätä kysymys, ovatko D^s:n alkiot tulkittavissa funktioksi tms. Seppo Hiltunen on laskenut tätä: jos $d > 2$, niin valittaessa funktiolle $u \in D^s$ jono $\{u_n\} \subset \mathcal{S} = X$ s.e. $u_n \to u$, niin $\{u_n\}$ suppenee $\mathcal{S}'$:ssa johonkin $T_u \in \mathcal{S}'$ ja tämä T_u on yksikäsitteinen (riippumaton jonon $\{u_n\}$ valinnasta). Sen sijaan tapaukseen $d = 1$, hän on löytänyt vastaesimerkin (tapaus $d = 2$ on auki).

Vastaus: Huom.: $d = 1$ (jos $d > 1$, tehtävä on hyvin vaikea)!
Niinpä voidaan itseisarvomerkit pudottaa (koska ko. funktiot ovat parillisia).
$\sin(x)/x$ on tietenkin lyhennemerkintä funktiolle, joka määritellään nollassa ykköseksi (jolloin siitä tulee jatkuva, peräti $\mathcal{C}_0$-funktio, minkä voisi päätellä siitäkin, että se osoitetaan alla funktion $\chi_{[-1,1]}/2\gamma \in L^1$ muunnokseksi).

Voidaan valita $c > 0$ (koska arvoilla $c < 0$ aaltoyhtälöllä on tietenkin samat ratkaisut kuin arvoilla $-c > 0$) (helpompi $c = 0$ jätettäköön tutkimatta; yo. $\hat{u}$ ei koske ko. tapausta), sitä paitsi fysikaalisessa ongelmassa c on aaltoliikkeen etenemisnopeus > 0.

$\hat{\delta}_a = \gamma e^{-ia\xi}$ ja $e^{ib} = \cos b + i\sin b$, joten $\hat{F}(\xi) := \cos(c|\xi|t) = \cos(c\xi t) = (e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t})/2 = [\hat{\delta}_{-ct} + \hat{\delta}_{ct}]/2\gamma$, siis $F = [\delta_{-ct} + \delta_{ct}]/2\gamma \in \mathcal{S}'$. $\mathcal{F}\chi_{[-b,b]} = 2\gamma\sin(bw)/w$, joten $\hat{G}(\xi) := \sin(c|\xi|t)/c|\xi| = \sin(c\xi t)/c\xi = \mathcal{F}\chi_{[-ct,ct]}/2c\gamma$, siis $G = \chi_{[-ct,ct]}/2c\gamma \in L^1 \subset \mathcal{S}'$. $(T * \phi)(x) := T(\tau_x\mathcal{R}\phi) := T(\check{\phi}(\cdot - x))$ [R3:6.29][5] $(\delta_a * f)(x) := \delta_a(\check{f}(\cdot - x)) = \check{f}(a-x) = f(x-a)$. $\mathcal{F}(f * g) = \gamma^{-1}\hat{f}\hat{g} \in \mathcal{S}$, kun $f,g \in \mathcal{S}$; $\in \mathcal{S}'$, kun $f \in \mathcal{S} \wedge g \in \mathcal{S}'$ [Rauch:s. 83-85]. Jos nyt tehtävässä $f,g \in \mathcal{S}$, niin yhtälö $\hat{u} = \hat{f}\hat{F} + \hat{g}\hat{G}$ on ekvivalenttia yhtälön

$$\begin{aligned}
u &= \gamma f * F + \gamma g * G = \gamma f * ([\delta_{-ct} + \delta_{ct}]/2\gamma) + \gamma g * \chi_{[-ct,ct]}/2c\gamma \\
&= [f(x+ct) + f(x-ct)]/2 + \frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\chi_{[-ct,ct]}(y)\,dy \\
&= [f(x+ct) + f(x-ct)]/2 + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g(x-y)/2\,dy \\
&= [f(x+ct) + f(x-ct)]/2 + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds
\end{aligned}$$

kanssa. Tämä on d'Alembertin ratkaisu [Kreyszig].[6]

[5] Tämä on siis Rudinin Functional Analysisin määritelmä; Rauchin määritelmä on ekvivalentti, vaikka se onkin esitetty hieman toisin. $\check{\phi}(y) := \phi(-y)$.

[6] Kuriositeetti: Tässä olisi voitu parin $\mathcal{S}' * \mathcal{S}$ sijasta valita pari (H^s, H^{-s}) (koska $F, G \in H^s$ sopivalla s) ja saada yleisempi tulos. Myös lopullinen ratkaisu voidaan yleistää suoraankin: jos todistetaan, että $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ on tiheä avaruudessa $X :=$

Tehtävä 6.3 ([3.7] *helppo, nopea, hyvä*):
Olkoon u aaltoyhtälön ratkaisu tapauksessa $f=0,\ g=\delta_0,\ d\in\mathbb{N}_+$. **(a)** Missä H^s-avaruudessa u on? **(b)** Onko u pisteittäin jatkuva, kun $d=2$?

Vastaus: (Tässä siis $t>0$ ja tulos on riippumaton t:stä, kuten ao. laskut osoittavat; tapauksessa $t=0$ on $u(t)=u(0)=f=0\in H^s\ \forall s$.)
(a) Nyt $f=0\wedge g=\delta_0$ eli $\hat f=0\wedge\hat g=\gamma$, joten $\hat u(\xi)=\hat f(\xi)\cos(c|\xi|t)+\hat g(\xi)\sin(c|\xi|t)/c|\xi|=\gamma\sin(c|\xi|t)/c|\xi|\in\mathcal{C}_0$.

$$\|\hat u\|_{H^s}^2=\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{2s}\gamma^2\sin^2(c|\xi|t)/c^2|\xi|^2\,d\xi=\int_0^\infty[\gamma^2\langle r\rangle^{2s}\sin^2(crt)/c^2r^2]a_dr^{d-1}\,dr$$

(tehtävän 4.2 pallointegraalilemman perusteella). Pudotetaan turhat vakiot pois:

$$\int_0^\infty\langle r\rangle^{2s}\sin^2(crt)r^{d-3}\,dr=\int_0^1+\int_1^\infty=:I_0+I_1.$$

I_0:ssa $\langle r\rangle<2$ ja $\sin(crt)\le crt$, joten $I_0\le 2^{2s}\int_0^1(crt)^2r^{d-3}\le 2^{2s}(ct)^2\Big|_0^1 r^d/d<\infty$. Siis riittää tutkia I_1:tä.

1° $u\in H^s$, kun $s<1-d/2$:
I_1:ssä $\langle r\rangle:=\sqrt{1+r^2}\le 2r$, joten $I_1\le 2^{2s}\int_1^\infty r^{d+2s-3}=\Big|_1^\infty r^{d+2s-2}/(d+2s-2)<\infty$, kun $d+2s-2<0$ eli $s<1-d/2$.

2° $u\notin H^s$, kun $s\ge 1-d/2$:
I_1:ssä $\langle r\rangle:=\sqrt{1+r^2}\ge 1$, joten $I_1\ge(ct)^{-1}\int_1^\infty r^{d+2s-3}\sin^2(crt)ct\,dr=\int_{ct}^\infty(y/ct)^{d+2s-3}\sin^2(y)\,dy=:I_1'$ (muuttujanvaihto: [R2:7.26(15)]). Vakiot voidaan pudottaa. Koska integrandi on jatkuva, $\int_{2\pi}^{ct}$ on äärellinen, joten voidaan tutkia integrandia $I_1'':=\int_{2\pi}^\infty y^{d+2s-3}\sin^2(y)\,dy\ge\int_{2\pi}^\infty y^{-1}\sin^2(y)\,dy=:I_1'''$. On helppo arvata, että $I_1''=\infty$, koska $\int_{2\pi}^\infty y^{-1}=\Big|_{2\pi}^\infty\ln y=\infty$ ja $\sin^2 y$ toimii eräänlaisena kertoimena. Todistetaan tämä paloittelemalla integraali:
$\int_{n2\pi}^{(n+1)2\pi}y^{-1}\sin^2 y\ge\int_{n2\pi}^{(n+1)2\pi}[(n+1)2\pi]^{-1}\sin^2 y=[(n+1)2\pi]^{-1}\pi=1/2(n+1)$. Niinpä $I_1'''=\int_{\cup_{n=1}^\infty[n2\pi,(n+1)2\pi[}y^{-1}\sin^2 y=\sum_{n=1}^\infty\int_{n2\pi}^{(n+1)2\pi}y^{-1}\sin^2 y\ge\sum_{n=1}^\infty 1/2(n+1)=\frac12\sum_{m=2}^\infty m^{-1}=\infty$.

(b) Jos s olisi suuri, Sobolevin upotuslause [2.6.7] kertoisi H^s:n jatkuvuuden – nyt siitä ei ole apua. Jos olisi $\hat u\in L^1$, niin olisi $u=\mathcal{F}^{-1}\hat u=\mathcal{R}\mathcal{F}\hat u\in\mathcal{R}\mathcal{C}_0=\mathcal{C}_0$, koska L^1-funktion muunnos on $\mathcal{C}_0$:ssa ($:=\mathcal{C}_v$, ei $\mathcal{C}_c$); siitäkään ei nyt ole apua.

Niinpä lunttaamme ratkaisun kirjasta: kaavan [s.138(11)] mukaan K_W:llä merkitään funktiota, jonka muunnos on meidän funktiomme $\hat u$; toisaalta kirjassa todistetaan, että tapauksessa $d=2$ pätee $G(t,x)=u(t,x)=K_W(t,x)=\frac{\operatorname{sgn}t}{2\pi c\sqrt{(ct)^2-|x|^2}}\chi_{|x|<c|t|}$ [Th4.8.2 (s. 164)], se siis ei ole pisteittäin jatkuva (vaan räjähtää etäisyydellä $c|t|$ origosta).

Tämä muistuttaa tapausta $d=1$ mm. siinä, että ajassa t kunkin pisteen alkutilan vaikutus ehtii levitä vain etäisyydelle ct ko. pisteestä.)

Tehtävä 6.4 ([Exe3.7.2] *keskitasoa, keskipitkä, OK*):
Mikäli aaltoliikkeeseen vaikuttaa elastinen termi bu ($b\ge 0$) ja viskoosinen kitkatermi au_t ($a\ge 0$), sitä kuvaa $\mathbb{R}^{1+d}$:ssä yhtälö

$$u_{tt}-\triangle u+au_t+bu=0\qquad u(0,\cdot)=f(\cdot),\quad u_t(0,\cdot)=g(\cdot).$$

Osoita, että jos $f\in H^s(\mathbb{R}^d)$, $g\in H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$, niin $\exists!u\in\cap_{j=0}^\infty\mathcal{C}^j(\mathbb{R},H^{s-j}(\mathbb{R}^d))$, joka toteuttaa yhtälön alkuehtoineen.[7]

Vastaus: (Tutki lähinnä vain tapaus $b<a^2/4$.)
Tällehän on olemassa ratkaisu $u\in\cap_{j=0}^\infty\mathcal{C}^j(\mathbb{R},\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ joss on olemassa

---

$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ ja että $H(f,g):=u_{tt}-c^2\Delta u$ (missä $u:=A(f,g)$ d'Alembertin kaavasta) on jatkuva $X\times X\to\mathbb{C}$, voidaan päätellä, että $H(f,g)=0\ \forall f,g\in X\times X$ (tätäkin voidaan parantaa). (Huom.: jos Y on tiheä X:ssä ja Z W:ssä, niin $Y\times Z$ on tiheä $X\times W$:ssä, minkä saat todistettua helposti vaikkapa käyttämällä summametriikkaa; jos tunnet topologioita, niin tee sama tulotopologian avulla. Vastaava pätee mielivaltaisissa karteesisissa tuloissa.)

[7] "$\exists!$": "on olemassa yksikäsitteinen".

$\hat{u} \in \cap_{j=0}^{\infty} \mathcal{C}^j(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ s.e.

$$\hat{u}_{tt} + a\hat{u}_t + (\xi^2 + b)\hat{u} \quad \hat{u}(0,\cdot) = \hat{f}(\cdot), \quad \hat{u}_t(0,\cdot) = \hat{g}(\cdot).$$

Kullakin ξ funktio $\hat{u}(\cdot,\xi)$ toteuttaa siis vakiokertoimisen LHY:n, jonka ratkaisu on (nähdään esim. yritteellä $e^{\lambda t}$)[8]

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-at/2}[A_\xi \cos(\omega t) + A'_\xi \sin(\omega t)],$$

missä $\omega = \sqrt{\xi^2 + b - a^2/4}$ ja $A_\xi, A'_\xi \in \mathbb{C}$, jos $\xi^2 + b - a^2/4 > 0$. Jos $\xi^2 = a^2/4 - b$, niin $\hat{u}(t,\xi) = e^{-at/2}[B_\xi + B'_\xi t]$, ja jos $\xi^2 < a^2/4 - b$, niin $\hat{u}(t,\xi) = e^{(-a+\sqrt{a^4-4b-4\xi^2})t/2}C_\xi + e^{(-a-\sqrt{a^4-4b-4\xi^2})t/2}C'_\xi$.

($\sqrt{a^2/4-b}$-säteisen pallon ulkopuolella) $\hat{u}(t,\xi) = e^{-at/2}[A_\xi \cos(\omega t) + A'_\xi \sin(\omega t)]$ ja $\hat{u}_t(t,\xi) = e^{-at/2}[-aA_\xi \cos(\omega t)/2 - aA'_\xi \sin(\omega t)/2 - \omega A_\xi \sin(\omega t) + \omega A'_\xi \cos(\omega t)]$, joten $\hat{f}(\xi) = \hat{u}(0,\xi) = A_\xi$ ja $\hat{g}(\xi) = \hat{u}_t(0,\xi) = -aA_\xi/2 + \omega A'_\xi$ eli $A'_\xi = [\hat{g}(\xi) + a\hat{f}(\xi)/2]/\omega$.

1° Olkoon $b > a^2/4$. Tällöin $\omega = \sqrt{\xi^2 + R^2}$, missä $R := \sqrt{b - a^2/4}$.

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-at/2}[\hat{f}(\xi)\cos(\omega t) + A'_\xi \sin(\omega t)[\hat{g}(\xi) + a\hat{f}(\xi)/2]/\omega]$$

$$= e^{-at/2}[\hat{f}(\xi)[\cos(\omega t) + a\sin(\omega t)/2\omega] + \hat{g}(\xi)\sin(\omega t)/\omega].$$

Nyt pitäisi todistaa, että $u \in H^s$ eli että $\langle\xi\rangle^s \hat{u} \in L^2$ (vast. $\langle\xi\rangle^{s-j}\partial_t^j \hat{u} \in L^2$). Jos $f \in H^s$ niin kiinteällä t selvästi ensimmäinen termi kerrottuna $\langle\xi\rangle^s$:llä $\in L^2$. Koska $1/\omega \le 1$, toinenkin termi kerrottuna $\langle\xi\rangle^s$:llä $\in L^2$. Jos $g \in H^{s-1}$, niin kolmaskin termi $\in H^s$, koska $(\langle\xi\rangle/\omega) \le \max(1, 1/R) =: c_1$ eli $\langle\xi\rangle \le c_1\omega$.

Toisaalta $(\langle\xi\rangle/\omega) \ge \min(1, 1/R) =: c_0$, joten tutkittaessa H^s-normin äärellisyyttä ω kelpaa siinä missä $\langle\xi\rangle$. Laskettaessa $\hat{u}$:n derivaattoja t:n suhteen eteen tulee vakioita (kuten $-a/2$) tai pahimmillaan ω (joka voidaan estimoida ylöspäin $c_0^{-1}\langle\xi\rangle$:ksi), joten jiinnes derivaatta kerrottuna $\langle\xi\rangle^{s-j}$:llä on L^2-funktio (tämän voisi todistaa induktiolla).

Väittämän [3.3.1] tapaan voidaan todistaa u:n olevan haluttua muotoa. Totesimme u:n olevan ainoa muotoa $u \in \cap_{j=0}^{\infty}\mathcal{C}^j(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ oleva ratkaisu – toisaalta jokainen haluttua muotoa oleva ratkaisu on tätä muotoa[9], joten ratkaisu on yksikäsitteinen. (Huom.: kuten lienet huomannut, tässä väitteitä ei ole todistettu aivan tarkasti, koska sellainen vaatisi turhan paljon tilaa.)

2° Tapaus $b \le a^2/4$ sivuutetaan.

[8] Jos ollaan tarkkoja, niin tämän ei välttämättä tarvitse päteä ei-sileillä u, vaan ainoastaan kun t-osittaisderivaatat ovat oikeita osittaisderivaattoja (ts. kun u on tulkittavissa funktiona, ei muuna distribuutiona). Nämä siis kuitenkin pätevät, kun $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ ja tiheyksiä ja jatkuvuuksia käyttämällä voitaneen vahvistaa tuloksen yksikäsitteisyys kohtuuvaivalla.

[9] Jos $u : \mathbb{R} \to H^r$ on derivoituva, niin on myös $u := I \circ u : \mathbb{R} \to \mathcal{S}'$, koska upotus $I : H^r \to \mathcal{S}'$ on jatkuva ja lineaarinen.