Mat-1.159 Harmoninen analyysi ja ..., 5. harjoitus ma 26.2.1996 klo 12–14, U325 (4 sivua)

Tehtävä 5.1 ([3.3] *helppo, nopea, hyvä*):
Olkoon $a > 0$, $s \geq 0$, $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Osoita, että yhtälöllä $u - a\triangle u = f$ on yksikäsitteinen ratkaisu $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$.

Vastaus: $H^s \subset \mathcal{S}'$, joten voidaan Fourier-muuntaa. Fourier-muunnos on bijektio $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, joten $S = T$ joss $\hat{S} = \hat{T}$, siis muunnetun yhtälön toteuttava u toteuttaa alkuperäisenkin (ja vain se).

$\triangle u := \sum_{k \leq d} \partial_k^2 u$ ja $\mathcal{F}\partial_k u = i\xi_k \hat{u}$, joten $\mathcal{F}\triangle u = \sum_k \mathcal{F}\partial_k^2 u = \sum_k (i\xi_k)^2 \hat{u} = -\sum_k \xi_k^2 \hat{u} = -\xi^2 \hat{u}$ ja

$$\hat{f} = \hat{u} + a\xi^2\hat{u} = (1 + a\xi^2)\hat{u} \quad \text{eli} \quad \hat{u} = \hat{f}/(1 + a\xi^2).$$

$$\|u\|_{H^{s+2}}^2 := \|\langle\xi\rangle^{s+2}\hat{u}\|_2^2 = \int |\frac{\langle\xi\rangle^2}{1 + a\xi^2}|^2 |\langle\xi\rangle^s \hat{f}|^2$$

(olkoon $c := \min\{1, a\} > 0$, jolloin $1 + a\xi^2 \geq c(1 + \xi^2) =: c\langle\xi\rangle^2$)

$$\leq \int |\frac{\langle\xi\rangle^2}{c\langle\xi\rangle^2}|^2 |\langle\xi\rangle^s \hat{f}|^2 \leq \int c^{-2} |\langle\xi\rangle^s \hat{f}|^2 = c^{-2}\|f\|_{H^s}^2 < \infty, \quad \text{QED.}$$

Tehtävä 5.2 ([3.3] *vaikea, työläs*):
Vie tarkasti läpi laskut, jotka osoittavat, että

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^{3/2}\, dx \leq 0,$$

missä u toteuttaa ehdot $u_t = \triangle u$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$; $u(0,x) = f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Vastaus: (Ehkä kannattaa lukea tehtävä 5.3 ensin, koska tässä viitataan siihen.)
Ratkaisun tiivistelmä:
1^o Ratkaistaan u. Nähdään, että $u(t) = K_t * f \in \mathcal{S}$, missä $K_t \in \mathcal{S}$ $\forall t > 0$.
2^o Lasketaan, että $\|K_t\|_1 = 1$ ja $K_{t+h} * f = K_h * (K_t * f)$ $(t, h > 0)$.
3^o Youngin lauseen perusteella $\|u(t+h)\|_p = \|K_h * u(t)\|_p \leq \|K_h\|_1 \|u(t)\|_p = \|u(t)\|_p$. Siis $\|u(t,\cdot)\|_p$ on vähenevä, joten myös $I(t) := \|u(t,\cdot)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^{3/2}\, dx$ (kun $p = 3/2$) on vähenevä.
4^o Niinpä $I'(t) \leq 0$, jos I on derivoituva; todistetaan, että I on derivoituva.[1]

1° $u_t = \triangle u$, joten $\hat{u}_t = \mathcal{F}\triangle u = \mathcal{F}\sum_k \partial_k^2 u = \sum_k (i\xi_k)^2 \hat{u} = -\xi^2\hat{u}$, minkä ainoa $\mathcal{S}$-ratkaisu on $\hat{u} = e^{-\xi^2 t}\hat{f}$ $(t \geq 0)$.[2]

Tehtävän 5.3 perusteella $\gamma e^{-t\xi^2} = \hat{K}_t(\xi)$, missä $K_t(x) = \gamma(2t)^{-d/2}e^{-x^2/4t} = (4\pi t)^{-d/2}e^{-x^2/4t}$ (vrt. [s.138(4)]). $\mathcal{F}(K_t * f) = \gamma^{-1}\hat{K}_t\hat{f} = e^{-t\xi^2}\hat{f} = \hat{u}(t)$ [s.83(5)], joten $u = K_t * f$ (olemme ratkaisseet lämpöyhtälön, jossa tosin lämmönjohtavuusvakio on oletettu ykköseksi (ongelman voi kiertää valitsemalla lämpötilan yksikön sopivasti)).

2° $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-r^2x^2} = (\pi/r^2)^{d/2}$, kuten tehtävässä 5.3. todetaan, joten

$$\|K_t\|_1 = (4\pi t)^{-d/2}\int e^{-x^2/4t} = (4\pi t)^{-d/2}(\pi/(1/4t))^{d/2} = 1.$$

---

[1]**"TAPA 2":** Tehtävän loppuhuipennuksen tapaan voidaan osoittaa, että seuraavassakin tapauksessa $\int \partial_t = \partial_t \int$, joten voitaisiin laskea $\partial_t \int |u|^{3/2} = \int \partial_t = \int \partial_t (u\bar{u})^{3/4} = \int \partial_t (3/4)(u\bar{u})^{-1/4}(u_t\bar{u} + u\bar{u}_t) = \int \partial_t (3/4)(u\bar{u})^{-1/4}(\bar{u}\triangle u + u\triangle\bar{u})$. Jos tuo $(u\bar{u})^{-1/4}$ puuttuisi, homma menisi mukavasti Greenin kaavoilla; nyt tämä tapa ei näytä onnistuvan.

[2]Mekaanisella laskulla nähdään, että todella $\hat{u}(t) \in \mathcal{S}$ $\forall t > 0$. Toinen mekaaninen lasku ja [Prop3.3.1] (4. harjoituksissahan laskimme, että siinä saa olla $\mathbb{R}$:n tilalla muukin joukko) osoittavat, että

$$\underline{\hat{u} \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty[;\mathcal{S})}$$

$(\partial_t^k \hat{u} = (-\xi)^k \hat{u} \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty[\times\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ (tässä $\partial_t^k \hat{u}(0)$ tarkoittaa tietenkin toispuolista derivaattaa) ja $t \mapsto \partial_t^k \hat{u}$ on jatkuva $[0,\infty[\to \mathcal{S}$, koska $\|(-xi)^k e^{-\xi^2(t+h)}\hat{f} - (-xi)^k e^{-\xi^2 t}\hat{f}\|_{\alpha,\beta} = \|(-xi)^k(e^{-\xi^2 h} - 1)u(t)\|_{\alpha,\beta} < \epsilon$, kun $h \geq 0$ on riittävän pieni (mekaaninen lasku)).

Niinpä $u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u} \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty[;\mathcal{S})$ ja $\partial\mathcal{F}^{-1}\hat{u} = \mathcal{F}^{-1}\partial\hat{u}$ (koska $\mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$; helppo lasku osoittaa, että $T \in \mathcal{L}(X,Y) \wedge u \in \mathcal{C}^1(I,X) \implies Tu \in \mathcal{C}^1(I,Y) \wedge \partial Tu = T\partial u$). Siis myös $\mathcal{F}\partial_t u = \partial_t \mathcal{F}u$, kuten yllä oletettiin.

u on ainoa $\mathcal{C}^1([0,\infty[;\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$-ratkaisu, koska tällöin $u \in \mathcal{C}^1([0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$ [Prop3.3.1] ja välttämättä $\partial_t[e^{\xi^2 t}\hat{u}(t)(\xi)] = 0$ ja näin ollen $[e^{\xi^2 t}\hat{u}(t)(\xi)] = [e^{\xi^2 0}\hat{u}(t)(\xi)] = \hat{f}(\xi)$ eli $\hat{u}(t)(\xi) = e^{-\xi^2 t}\hat{f}(\xi)$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^d$.

$\mathcal{F}[K_{t+h} * f] = \mathcal{F}u(t+h) = e^{-\xi^2(t+h)}\hat{f} = e^{-\xi^2 h}e^{-\xi^2 t}\hat{f} = e^{-\xi^2 h}\hat{u}(t) = \mathcal{F}[K_h * u(t)]$.

3° Ei lisättävää.

4° $g_x(t) := |u(t,x)|^2 = u\bar{u} \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty[)$ kiinteällä x (koska $\bar{u} \in \mathcal{C}^\infty$, koska $u \in \mathcal{C}^\infty$ (ks. ed. alaviite) ja $\bar{u}_t = (\operatorname{Re} u)_t - i(\operatorname{Im} u)_t = (\operatorname{Re} u - i \operatorname{Im} u)_t = (\bar{u})_t$ jne), jolloin $\exists g_x'(t) = u_t\bar{u} + u\bar{u}_t = 2\operatorname{Re}(u_t\bar{u})$. Ketjusäännön perusteella $g_x(t) > 0 \implies \exists (g_x^r)'(t) = r g_x(t)^{r-1} g_x'(t)$, kun $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Olkoon sitten $g_x(t) = 0$. $M := \sup_{[0,t+1]} |g_x''|$. Tällöin $u(t,x) = 0 = \bar{u}(t,x)$, joten $g_x'(t) = 0$. Niinpä tällaisissa pisteissä Taylorin kehitelmän perusteella $g_x(t+h) = 0 + 0 + h^2 g_x''(t+s_h)/2!$ jollain $s \in [0,h]$ [R1:5.15].

$$|\frac{|g_x(t+h)|^{3/4} - |g_x(t)|^{3/4}}{h}| \le |\frac{|h^2 M|^{3/4} - |0|^{3/4}}{h}| = M^{3/4} h^{1/2} \to 0,$$

joten $F_x(t) := |u(t,x)|^{3/2} = g_x(t)^{3/4} \ge 0$ on derivoituva $\forall t \in [0,\infty[$ ja sen derivaatta on ($r = 3/4$)

$$F_x'(t) = r g_x(t)^{r-1} g_x'(t) \chi_{g_x(\cdot)>0}(t) = \frac{3}{4}|u|^{-1/2} 2\operatorname{Re}(u_t\bar{u})\chi_{u(\cdot,x)\neq 0}(t)$$

$$= \frac{3}{2}|u|^{1/2}\operatorname{Re}(u_t\frac{\bar{u}}{|u|})\chi_{u(\cdot,x)\neq 0}(t).$$

$G(t,x) := F_x(t) \ge 0$, jolloin $|G_t(t,x)| = |F_x'(t)| \le \frac{3}{2}\sqrt{|u(t,x)|}|u_t(t,x)|$ (erityisesti F_x' on jatkuva myös niissä t, joissa $u(t,x) = 0$, siis F_x' ja G_t ovat jatkuvia kiinteällä x).

Nyt voidaan osoittaa, että $\partial_t \int_{\mathbb{R}^d} G = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t G$:

Olkoon $t_0 > 0$ sekä $\epsilon > 0$. $u_t \in \mathcal{C}([0,\infty[;\mathcal{S})$ ja $\|\cdot\|_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}(\mathcal{S};\mathbb{R})$, ja näin ollen $t \mapsto \|u_t(t)\|_{\alpha,\beta}$ on jatkuva $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$, joten em. jatkuvalla funktiolla on maksimi kompaktissa joukossa, siis $\exists M_{\alpha,\beta} := \max_{t\in[0,t_0+1]} \|u_t(t)\|_{\alpha,\beta}$.

Valitaan s s.e. $\langle x\rangle^{-s} \in L^1$. $M'' := \sup_{[0,t+1]} \|\langle x\rangle^s u_t\|_\infty$ ($< \infty$, koska sitä voidaan majoroida $M_{\alpha,0}$-termeillä). Valitaan $R > 0$ s.e. $\int_{|x|>R} \langle x\rangle^{-s}\,dx < \epsilon/3M''M^{1/2}$. Jos $|h| \le 1$, niin

$$\int_{|x|>R} |G_t(t+h,x)| \le 2M^{1/2}\int_{|x|>R} |u_t(t+h,x)| \le 2M^{1/2}\int_{|x|>R} \langle x\rangle^{-s} M'' < \epsilon/3,$$

$$|h^{-1}[\int_{\mathbb{R}^d} G(t+h,x) - \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x)] - \int_{\mathbb{R}^d} G_t(t,x)|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d} |\frac{G(t+h,x) - G(t,x)}{h} - G_t(t,x)| = \int_{\mathbb{R}^d} |G_t(t+s_{h,x},x) - G_t(t,x)|$$

$$= \int_{|x|>R} + \int_{B_R} \le \int_{|x|>R} (|G_t(t+s_{h,x},x)| + |G_t(t,x)|) + \int_{B_R} |G_t(t+s_{h,x},x) - G_t(t,x)|$$

$$< 2\epsilon/3 + \int_{B_R} |G_t(t+s_{h,x},x) - G_t(t,x)| < \epsilon$$

(missä $s_{h,x} \in]0,h[\ \forall x$) riittävän pienillä $|h|$, koska dominoidun konvergenssin perusteella viimeinen integraali menee nollaan, koska integrandi menee pisteittäin nollaan (koska G_t on jatkuva) ja sillä on olemassa $L^1(B_R)$-majorantti (esim. vakiofunktio $2\sqrt{M}M'$, missä $M := \|f\|_\infty \ge \|u(t)\|_\infty\ \forall t$ ja $M' := \sup_{[0,t+1]} \|u'(t)\|_\infty$ (äärellisiä, koska $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ on jatkuva (siis myös $\|u(\cdot)\| : [0,t+1] \to \mathbb{R}$) ja $[0,t+1]$ on kompakti), QED.[3]

Tehtävä 5.3 ([s. 104] *keskitasoa, keskipitkä*):
Osoita, että $\sup_{\phi\in\mathcal{S}\setminus\{0\}} \frac{\|S(t)\phi\|_p}{\|\phi\|_p} = \infty$, jos $1 \le p < \infty,\ p \neq 2,\ t > 0$ ja $S(t)$ on on Schrödingerin yhtälön propagaattori.
Vihje: $\phi(x) = \exp\{-\frac{1}{2}(a+ib)x^2\}$. [Problem3.4.2]

Vastaus: $(\mathcal{F}S(t)\phi)(\xi) := e^{-it\xi^2}\hat{\phi}(\xi)$ [s. 104]. (Huom. $S(t) : \mathcal{S} \to H^s$ on rajoitettu H^s-normin suhteen [Rauch:Prop3.4.1], joten se laajenee yksikäsitteisesti koko H^s:lle (siis $S(t) \in \mathcal{L}(H^s)$) [Prop2.3.1], koska $\mathcal{S}$ (jopa $\mathcal{D} := \mathcal{C}_c^\infty$) on tiheä H^s:ssä [Prop2.6.6].)

Ratkaisun tiivistelmä: 1^o Lasketaan $\hat{\phi}$ (pitkä lasku, suunnilleen kuten [Rauch:s.64–65], mutta vähän sekavampi, koska x^2:n kerroin ei ole 1).

[3] **Tärkeää:** Yleensäkin $\partial_t \int_Q f(t,x)\,dx = \int_Q f_t(t,x)\,dx$, jos f_t on jatkuva ja sillä on L^1-majorantti g (jossain tutkittavan t:n ympäristössä), jolloin $\int |f_t(t+s_{h,x},x) - f_t(t,x)| \to 0$ dominoidun konvergenssin perusteella, koska $|f_t(t+s_{h,x},x) - f_t(t,x)| \le 2g$ ja se menee pisteittäin nollaan f_t:n jatkuvuuden perusteella. (Siis kiinteillä x oltava $f(\cdot,x) \in \mathcal{C}^1$ ja kiinteillä t on oltava $f(t,\cdot), f_t(t,\cdot) \in L^1(Q)$.)
(Tässä tehtävässä vain oli helpompaa laittaa integraali ensin osiin.)

2^o Helposti lasketaan $S(t)\phi$ ja sitten jaetaan sen L^p-normi ϕ:n L^p-normilla ja todetaan, että osamäärä voi olla miten suuri tahansa (sopivilla $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$).

1° Tutkitaan aluksi tapausta $d = 1$ kuten [Rauch:s.64–65]: Olkoon $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c^2 := (a + ib)/2$ (s.e. $\operatorname{Re} c > 0$, jolloin $|\operatorname{Arg} c| < \pi/4$, koska $|\operatorname{Arg}(a + bi)| < \pi/2$). Tällöin $\phi := e^{-\frac{1}{2}(a+ib)x^2} = e^{-c^2x^2} \in \mathcal{S}$ (mekaaninen lasku). Olkoon $\xi \in \mathbb{R}$.

$$\hat{\phi}(\xi) = \gamma \int e^{-c^2x^2} e^{-ix\xi}\, dx = \gamma \int e^{-(cx+i\xi/2c)^2-\xi^2/4c^2} = \gamma e^{-\xi^2/4c^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(cx+i\xi/2c)^2}\, dx$$

$$= c^{-1}\gamma e^{-\xi^2/4c^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(cx+i\xi/2c)^2} c\, dx = c^{-1}\gamma e^{-\xi^2/4c^2} \int_\Gamma e^{-z^2}\, dz =: c^{-1}\gamma e^{-\xi^2/4c^2} I.$$

($\int_\Gamma f(z)\, dz := \int_I f(x) \frac{dz}{dx}\, dx$ [R2:Def10.8].)
Koska integrandi $=: g$ on L^1-funktio, dominoidun konvergenssin perusteella $\chi_{[-N,N]} g \underset{L^1}{\to} g$ ja $\int_{-N}^N g \to g$. Merkitään muuttujan $z := cx + i\xi/2c$ piirtämää käyrää Γ_N:llä (kun x kulkee $-N$:stä N:ään). Yhdistetään Γ_N:n päät x-akseliin pystysuorilla janoilla Λ'_N ja Λ''_N, jolloin saadaan käyrä Λ_N, jonka x-akselia pitkin kulkeva osuus olkoon $[M_N, M_N + M'_N]$. Γ_N:n kulmakerroin on $\operatorname{Arg} c \in]-\pi/4, \pi/4[$, joten pystyjanojen yhteispituus on enintään M'_N ja $0 < M'_N \le 2N|c|$.

Janan Λ''_N alkupiste (pisteen $x = N$ kuva) on $z_N := cN + i\xi/2c$. $\alpha := \operatorname{Arg} c$, $\beta := (\pi/4 + |\alpha|)/2 < \pi/4$. $\lim_{N\to\infty} \operatorname{Im} z_N / \operatorname{Re} z_N = \operatorname{Im} c / \operatorname{Re} c =: r$ ja $|r| < 1$, joten voidaan valita $M''_N \in \mathbb{N}$ s.e. $|\operatorname{Arg} z_N| < \beta\ \forall N \ge M''_N$. Näillä N on $|\operatorname{Arg} z^2| < \beta < \pi/2$, kun $z \in \Lambda''_N$, koska Λ''_N yhdistää z_N:n pystysuoraan x-akselille. Siis $\operatorname{Re} z^2 \ge |z^2| \cos\beta =: r'|z|^2$. Toisaalta $|z| \ge \operatorname{Re} z_n \ge N \operatorname{Re} c/2$, kun $N \ge M'''_N$. Niinpä $\operatorname{Re} z^2 \ge r'' N^2$ suurilla N; vastaava pätee Λ'_N:lla, joten näillä N on

$$\left|\int_{\Lambda'_N \cup \Lambda''_N} e^{-z^2}\, dz\right| \le \int_{\Lambda'_N \cup \Lambda''_N} e^{-r'''N^2/4} |dz| < 2N|c| e^{-r'''N^2/4} \to 0,$$

siis $\int_{\Gamma_N} - \int_{[M_N, M_N+M'_N]} = \int_{\Lambda'_N \cup \Lambda''_N} \to 0$ (yhtäsuuruus pätee, koska $\int_\Gamma f = 0$, kun f on analyyttinen ja Γ suljettu), joten $\lim_N \int_{\Gamma_N} - \lim_N \int_{[M_N, M_N+M'_N]} = 0$ eli

$$I = \lim_N \int_{\Gamma_N} = \lim_N \int_{[M_N, M_N+M'_N]} \overset{dom.\ konv.}{=} \int_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\, dz = \sqrt{\pi},$$

joten $\hat{\phi}(\xi) = c^{-1}\gamma e^{-\xi^2/4c^2} I = c^{-1} e^{-\xi^2/4c^2}/\sqrt{2} = (a + bi)^{-1/2} e^{-\xi^2/2(a+bi)}$.
$\mathbb{R}^d$:ssä $e^{-(a+ib)x^2/2-i\xi x} = \prod_k e^{-(a+ib)x_k^2/2-i\xi_k x_k}$, joten sisimmästä integraalista voidaan ottaa muut x_k kuin x_1 ulos jne., jolloin muunnos on muunnosten tulo, eli $(a + bi)^{-d/2} e^{-\xi^2/2(a+bi)}$ (vrt. [Rauch:s. 64–65]). Siis yleisesti

$$\mathcal{F} e^{-A\xi^2} = (2A)^{-d/2} e^{-\xi^2/4A} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad (\operatorname{Re} A > 0)$$

(missä $A^{1/2}$ on se A:n neliöjuuri, jonka reaaliosa on positiivinen).

$$\mathbf{2^o} \quad S(t)\phi = (\mathcal{F}^{-1})\mathcal{F} S(t)\phi = (\mathcal{F}\mathcal{R}) e^{-it\xi^2} (a + bi)^{-d/2} e^{-\xi^2/2(a+bi)}$$

$$= (a + bi)^{-d/2} \mathcal{F}[e^{-it\xi^2} e^{-\xi^2/2(a+bi)}] = (a + bi)^{-d/2} \mathcal{F} e^{-(1/2(a+bi)+it)\xi^2}$$

$$= (a+bi)^{-d/2} (2/2(a+bi)+2it)^{-d/2} e^{-\xi^2/4(1/2(a+bi)+it)} =: C_n^{-d/2} e^{-\xi^2/[2/(a+bi)+4it]}.$$

$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, joten $\int_{\mathbb{R}} e^{-r^2x^2}\, dx = r^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-(rx)^2} r\, dx = r^{-1}\sqrt{\pi}$, jos $r > 0$; $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-r^2x^2} = r^{-d}\pi^{d/2} = (\pi/r^2)^{d/2}$ vastaavasti. Niinpä

$$\|e^{-(a+bi)x^2}\|_p^p = \int |e^{-(a+bi)x^2}|^p = \int |e^{-ax^2}|^p = \int e^{-apx^2} = (\pi/ap)^{d/2}.$$

Siis $\|\phi\|_p^p = (2\pi/ap)^{d/2} =: G^{d/2}$. $z := a + bi$.

$$\|S(t)\phi\|_p^p = |C_n|^{-pd/2} [2\pi/p \operatorname{Re}(2/z + 4it)^{-1}]^{d/2}$$

$$= [(|z||2/2z + 2it|)^{-p} \cdot 4\pi/p \operatorname{Re}(1/z + 2it)^{-1}]^{d/2}.$$

Nyt $\operatorname{Re}(1/z + 2it)^{-1} = \operatorname{Re}[z/(1 + 2itz)] = \operatorname{Re}[z\overline{(1 + 2itz)}/|1 + 2itz|^2] = \operatorname{Re}[z(1 - 2it\bar{z})]/|1 + 2itz|^2] = a/|1 + 2itz|^2$, joten hakasulkujen sisällä oleva lauseke on $H := (|z||2/2z + 2it|)^{-p} \cdot 4\pi/p \operatorname{Re}(1/z + 2it)^{-1} = (|1 + 2itz|)^{-p} \cdot 4\pi/p(a/|1 + 2itz|^2) = |1 + 2itz|^{-p+2} \cdot 4\pi/pa$ ja $H/G = 2|1 + 2itz|^{2-p}$.
Nyt $k_a := \|S(t)\phi\|_p/\|\phi\|_p = [(H/G)^{d/2}]^{1/p} = (H/G)^{d/2p}$, joten riittää

todeta, että H/G voidaan saada mielivaltaisen suureksi:
Jos $p < 2$, niin valitaan $|z|$ suureksi; jos $p > 2$, niin valitaan $z = a + i/2t$, jolloin $H/G = 2|1 + 2itz|^{2-p} = 2|2ita|^{2-p} = 2/|2at|^{p-2}$ saadaan mielivaltaisen suureksi, QED.

Tehtävä 5.4 ([s. 107] *keskitasoa, keskipitkä*):
Olkoon $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$ Schrödingerin yhtälön ratkaisu alkuarvolla $u(0) = f \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Osoita, että jos $s - 2k > d/2$, niin $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^{1+d})$.

Vastaus: Sobolevin upotuslauseen [Rauch:Sobolev Embedding Theorem 2.6.7] mukaan $f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ ja $|\alpha| \le k \implies \|\partial^\alpha f\|_{\mathcal{C}_0} \le c\|f\|_{H^s}$ jollain $c = c_{s,k,d}$, kun $s > d/2 + k$ (tässä $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}_v$ max-normilla eli $\|\cdot\|_\infty$-normilla). Siis jokainen H^s-funktio (isolla s) on jatkuva (oikeastaa H^s:n alkiot ovat m.k.-samojen funktioiden ekvivalenssiluokkia, joista kustakin löytyy yksi jatkuva funktio, joksi ko. alkio on järkevä samaistaa); riittävän isoilla s ne ovat derivoituviakin. Lisäksi identiteettikuvaus $H^s \to \mathcal{C}_0^k$ on jatkuva (tällaisia lineaarisia jatkuvia injektioita sanotaan upotuksiksi, niissä siis jokin avaruus tavallaan sisältyy toiseen (vaikka siinä saattaa olla toista aidosti vahvempi topologia, kuten nyt)).

Nyt $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s)$ [Prop3.4.4], jopa $u \in \mathcal{C}^j(\mathbb{R}, H^{s-2j}(\mathbb{R}^d))$ $\forall j \in \mathbb{N}_0$ (*) [Prop3.4.5,p. 106].

Ratkaisun tiivistelmä:
1a. Edellä todettiin, että u:ta voidaan derivoida $j \le k$ kertaa t:n suhteen.
1b. Todetaan [2.6.7]:n avulla, että nuo H^{s-2j}-derivoinnit (erotusosamäärän raja-arvot H^{s-2j}:ssä) ovat oikeita pisteittäisiä derivointeja.
2. Jos derivoidaan $j < k$ kertaa, osoitetaan [2.6.7]:n avulla, että voidaan vielä derivoida $k - j$ kertaa muuttujien $x_1, ..., x_d$ suhteen.
3. Osoitetaan [2.6.7]:n avulla, että saatu osittaisderivaatta on jatkuva.

1^o Merkitään $v(t,x) := (u(t))(x)$. Olkoon $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ja $|\alpha| + j = k$. Meidän on osoitettava, että $\partial_x^\alpha \partial^j v$ on olemassa ja jatkuva. (huom.: tässä $\alpha' := (\alpha_1, ..., \alpha_d, j) \in \mathbb{N}^{d+1}$ ja $|\alpha'| = k$).

$$
\Big|\frac{u^{(m)}(t+h)(x) - u^{(m)}(t)(x)}{h} - u^{(m+1)}(t)(x)\Big|
$$

$$
\le \Big\|\frac{u^{(m)}(t+h) - u^{(m)}(t)}{h} - u^{(m+1)}(t)\Big\|_{\mathcal{C}_0}
$$

$$
\le c\Big\|\frac{u^{(m)}(t+h) - u^{(m)}(t)}{h} - u^{(m+1)}(t)\Big\|_{H^l} \to 0,
$$

kun $u^{(m)} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^l)$ jollain $l > d/2$ (erityisesti kun $m \le k - 1$, koska $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, H^l)$ arvolla $l = s - 2k > d/2$), koska $\|f\|_{\mathcal{C}_0} \le c_{l,d}\|f\|_{H^l}$, kun $l > d/2$ [Th2.6.7]. Tästä seuraa, että $\exists \partial_t^m v(t,x) = u^{(m)}(t)(x)$ $\forall t, x$ $\forall m \le k$.

Toisaalta $\partial_t^j v(t,\cdot) = u^{(j)}(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^{s-2j}(\mathbb{R}^d))$ [(*)] ja $H^{s-2j} \subset \mathcal{C}_0^{2k-2j}$ (**) (koska $s - 2j > d/2 + (2k - 2j)$) joten $\exists \partial_x^\alpha(\partial_t^j)v = \partial_x^\alpha u^{(j)}$.

2^o $\partial_x^\alpha(\partial_t^j)v$ on jatkuva: Olkoon $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ja $\epsilon > 0$. $u^{(j)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^{s-2j}(\mathbb{R}^d))$, joten voidaan valita $\delta' > 0$ s.e. $|t - t_0| < \delta' \implies \|u(t) - u(t_0)\|_{H^{s-2j}} < c_{s-2j,k,d}^{-1}\epsilon/2$. Koska $u^{(j)}(t_0) \in H^{s-2j}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_0^{2k-2j}$, voidaan valita $\delta'' > 0$ s.e. $|x - x_0| < \delta'' \implies |\partial_x^\alpha \partial^j u(t_0)(x) - \partial_x^\alpha \partial^j u(t_0)(x_0)| < \epsilon/2$. Jos $|(t,x) - (t_0,x_0)| < \delta := \min(\delta', \delta'')$, niin

$$
|\partial_x^\alpha \partial_t^j v(t,x) - \partial_x^\alpha \partial_t^j v(t_0,x_0)|
$$

$$
\begin{aligned}
&= |\partial_x^\alpha \partial^j u(t)(x) - \partial_x^\alpha \partial^j u(t_0)(x) + \partial_x^\alpha \partial^j u(t_0)(x) - \partial_x^\alpha \partial^j u(t_0)(x_0)| \\
&\le |\partial_x^\alpha \partial^j u(t)(x) - \partial_x^\alpha \partial^j u(t_0)(x)| + |\partial_x^\alpha \partial^j u(t_0)(x) - \partial_x^\alpha \partial^j u(t_0)(x_0)| \\
&< \|\partial_x^\alpha \partial^j u(t) - \partial_x^\alpha \partial^j u(t_0)\|_{\mathcal{C}_0} + \epsilon/2 \\
&< c_{s-2j,k,d}\|\partial^j u(t) - \partial^j u(t_0)\|_{H^{s-2j}} + \epsilon/2 < \epsilon, \quad \text{QED.}
\end{aligned}
$$

[4]

[4] Tämän tehtävän voisi ratkaista vähän abstraktimminkin: $u \in \mathcal{C}^k(\Omega, X) \wedge T \in \mathcal{L}(X,Y) \implies Tu \in \mathcal{C}^k(\Omega, Y) \wedge \partial^j Tu = T\partial^j u$ $\forall j \le k$. Niinpä tehtävän tapauksessa $u^{(j)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^{s-2j}(\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{C}^(\mathbb{R}, \mathcal{C}_0^{2k-2j}(\mathbb{R}^d))$ (oikeastaan $u \circ I \in \mathcal{C}^(\mathbb{R}, \mathcal{C}_0^{2k-2j}(\mathbb{R}^d))$ [(**)]) jne.

Huom.: koska jatkuvat osittaisderivaatat kommutoivat, derivoinnit voi suorittaa muissakin järjestyksissä ja tulos on silti sama (mikä nähdään soveltamalla induktiota [R1:9.41]:een).